I. Etudes de fonctions : rappels et prolongements
Fonctions irrationnelles.

1. Exercices de révision

Etudier les fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = 2x^3 + x^2 - 13x + 6$
2. $f_2(x) = \frac{3x-5}{1-2x}$
3. $f_3(x) = \frac{x^3}{4-x^2}$
4. $f_4(x) = \frac{2x^2+6x+4}{x^2}$

2. Tangentes au graphe d'une fonction.

2.1 Tangente en un point donné du graphe d'une fonction

Soit à déterminer l'équation de la tangente au graphe de $f_2(x) = \frac{3x-5}{1-2x}$ au point d'abscisse 2.

Par le calcul de $f(2) = \frac{6-5}{1-4} = -\frac{1}{3}$ nous avons la coordonnée complète d'un point de cette droite.

Dans l'étude de la fonction, nous avons déterminé la dérivée $f'(x) = \frac{-7}{(1-2x)^2}$

La pente de la tangente sera donc : $f'(2) = \frac{-7}{(1-4)^2} = \frac{-7}{9}$

L'équation de la tangente se détermine alors facilement : $y + \frac{1}{3} = -\frac{7}{9}(x - 2) \Leftrightarrow 9y + 7x - 11 = 0$

(On peut aisément le vérifier graphiquement.)

Exercice :

Déterminer l'équation de la tangente à cette même courbe au point d'abscisse $\frac{5}{3}$ (sol : $7y + 9x - 15 = 0$)

2.2 Tangente parallèle à une direction donnée.

Considérons à nouveau la fonction de l'exemple précédent. Nous allons maintenant nous intéresser à l'équation de la tangente à cette courbe parallèle à la droite d'équation $y = -7x$.

Il faut donc déterminer une valeur de x telle que $f'(x)$ soit égal à - 7 : c-à-d $\frac{-7}{(1-2x)^2} = -7$ La résolution de cette équation nous donne 2 solutions : $x = 0$ ou $x = 1$

si $x = 0$, $f(0) = -5$ et $t_1 \ni (0, -5)$ et de pente $-7 \Rightarrow t_1 \equiv y + 7x + 5 = 0$

si $x = 1$, $f(1) = 2$ et $t_2 \ni (1, 2)$ et de pente $-7 \Rightarrow t_2 \equiv y + 7x - 9 = 0$

A nouveau, ce résultat peut être vérifié graphiquement.

2.3 Tangente au graphe d'une fonction comprenant un point donné

Considérons toujours la fonction de l'exemple précédent. Nous allons maintenant rechercher l'équation de la (des) tangentes à cette courbe issue(s) d'un point donné.

a) $t \ni (0, 0)$. Il faut donc que le système $\begin{cases} y = ax \\ y = \frac{3x-5}{1-2x} \end{cases}$ admette une seule solution. En résolvant ce système par substitution, nous obtenons l'équation $-2ax^2 + (a-3)x + 5 = 0$ qui admet une solution unique lorsque $a = 17 \pm \sqrt{280}$. Les équations des tangentes à la courbe comprenant le point (0, 0) sont donc :

$t_1 \equiv y = (-17 + \sqrt{280})\,x$ et $t_2 \equiv (-17 - \sqrt{280})\,x$

b) t ∍ (1, - 1) Il faut alors que le système $\begin{cases} y+1 = a(x-1) \\ y = \dfrac{3x-5}{1-2x} \end{cases}$ admette une seule solution. Comme dans le cas précédent, nous obtenons l'équation : $2ax^2 + (1 - 3a)\,x + a - 4 = 0$ qui admet une solution unique lorsque $a = -13 \pm \sqrt{168}$

Les équations des tangentes sont donc : $y + 1 = (-13 \pm \sqrt{168})\,(x - 1)$

c) t ∍ (2, 1) : en procédant de même, nous obtenons l'équation : $2ax^2 + (5 - 5a)\,x - 6 + 2a = 0$ dont le réalisant vaut : $9a^2 - 2a + 25$. Celui-ci n'est jamais nul. Il n'y a donc pas de tangente au graphe comprenant le point (2, 1)

2.4 Exercices.

1. $f(x) = (x - 1)^2\,(x + 2)$
   a) Déterminer les équations des tangentes à cette courbe au point d'abscisse 2 ainsi qu'aux points d'intersection du graphe avec les axes.
   b) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe parallèle à la droite $d \equiv 9x + 4y = 0$
2. $f(x) = (x - 1)\,(x^2 - 1)$
   a) déterminer les équations des tangentes au graphe aux points d'intersection avec les axes.
   b) déterminer les équations des tangentes au graphe parallèles à la droite $d \equiv y = 4x$ (préciser les points de contact.)
3. $f(x) = \dfrac{x}{(x-1)^2}$ a) Déterminer les équations des tangentes à cette courbe en la racine et aux points d'abscisses - 1 , 1/2, et 2
   b) Déterminer l'équation de la tangente parallèle à la droite d'équation : $2y + x = 0$
4. $f(x) = \dfrac{2x-1}{1-3x}$ a) déterminer l'équation de la tangente au graphe au point d'abscisse 1
   b) déterminer l'équation de la tangente au graphe parallèle à la droite d'équation $y + 4x = 0$
   c) déterminer l'équation de la tangente à cette courbe comprenant le point (0, 0)
5. $f(x) = \dfrac{3x-2}{1-2x}$ a) Déterminer l'équation de la tangente au point d'abscisse 1
   b) Déterminer l'équation de la tangente parallèle à la droite d'équation : $4y + x = 0$
   c) Déterminer l'équation de la tangente à cette courbe comprenant le point A (1, -2)

Solutions.

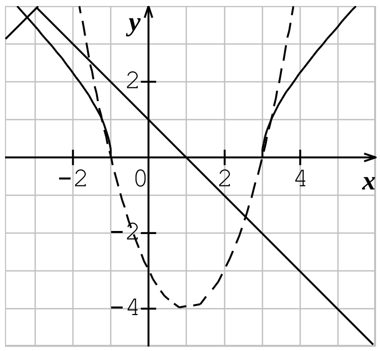
1. a) tangente en (2, 4) : $t_1 \equiv y - 9x + 14 = 0$ en (-2, 0) : $t_2 \equiv y - 9x - 18 = 0$
   en (1, 0) : $t_3 \equiv y = 0$ en (0, 2) : $t_4 \equiv y + 3x - 2 = 0$
   b) en (1/2, 5/8) : $t_5 \equiv 4y + 9x - 7 = 0$ en (-1/2, 27/8) : $t_6 \equiv 4y + 9x - 9 = 0$
2. a) t_1 en (-1, 0) pente = 4 $t_1 \equiv y - 4x - 4 = 0$
   t_2 en (0, 1) pente = - 1 $t_2 \equiv y + x - 1 = 0$
   t_3 en (1, 0) pente = 0 $t_3 \equiv y = 0$
   b) t_4 en (5/3, 32/27) : $t_4 \equiv y - 4x + \dfrac{148}{27} = 0$ t_5 en (-1, 0) : $t_5 \equiv y - 4x - 4 = 0$
3. a) en (0, 0) : $t_1 \equiv y = x$ en (-1, -1/4) : $t_2 \equiv y = -1/4$ en (1/2, 2) : $t_3 \equiv y - 12x + 4 = 0$
   en (2, 2) : $t_4 \equiv y + 3x - 8 = 0$
   b) $t_5 \equiv 4y + 2x - 9 = 0$
4. a) en (1, -1/2) : $t_1 \equiv 4y + x + 1 = 0$
   b) en (1/6, -4/3) : $t_2 \equiv 3y + 12x + 2 = 0$ en (1/2, 0) : $t_3 \equiv y + 4x - 2 = 0$
   c) $t_{1,2} \equiv y = (-4 \pm 2\sqrt{3})\,x$
5. a) en (1, -1) : $t_1 \equiv y + x = 0$
   b) en (3/2, -5/4) : $t_2 \equiv 8y + 2x + 7 = 0$ en (-1/2, -7/4) : $t_3 = 8y + 2x + 15 = 0$
   c) $t_{1,2} \equiv -2 + (-3 \pm 2\sqrt{2})(x - 1)$ ou : $t_1 \equiv y = -0.17x - 1.18$ et $t_2 \equiv -5.8\,x + 3.82$

3. Fonctions irrationnelles.

3.1 Exemple 1 :

Soit la fonction : f : R → R : f(x) = $\sqrt{x^2 - 2x - 3}$
En utilisant les observations sur la déduction de graphes dans le cas de la racine carrée d'une autre fonction, nous obtenons aisément le domaine et le tableau de variation de cette fonction à partir de la fonction du second degré : g(x) = $x^2 - 2x - 3$ (racines : -1 et 3)

		-1		3	
f'	-	|	|	|	+
f	↘	0	|	0	↗



Il reste donc à rechercher les éventuelles asymptotes de cette fonction.
Le calcul nous permet de vérifier que la fonction admet une asymptote oblique en + ∞ : y = x -1 et une asymptote oblique en - ∞ : y = - x + 1
Et nous obtenons ainsi le graphique ci-contre (où les asymptotes et la fonction g(x) ont également été représentées.

3.2 Exemple 2 :

Soit la fonction : f : R → R : x → f(x) = $x\sqrt{2 - x^2}$
dom f = [- $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$]   Racines : x = 0 et x : ± $\sqrt{2}$ f(0) = 0
Le domaine de cette fonction nous permet d'affirmer immédiatement qu'elle n'admet pas d'asymptote.

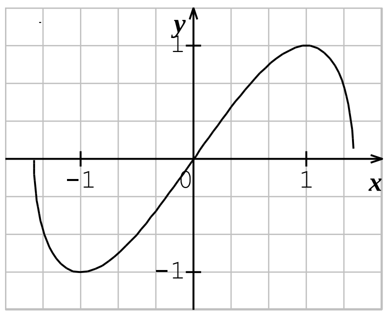
f ' (x) = $\dfrac{2 - 2x^2}{\sqrt{2 - x^2}}$ ses racines : x = ± 1

f " (x) = $\dfrac{2x(x^2 - 3)}{\sqrt{(2 - x^2)^3}}$ ses racines : x = 0 et x = ± $\sqrt{3}$

		$-\sqrt{3}$		$-\sqrt{2}$		-1		0		1		$\sqrt{2}$		$\sqrt{3}$	
f '	/	/	/	/	-	0	+	+	+	0	-	/	/	/	/
f "	/	/	/	/	+	+	+	0	-	-	-	/	/	/	/
f	/	/	/		↘	min	↗	↗	↗	max	↘		/	/	/
f	/	/	/		∪	∪	∪	P.I.	∩	∩	∩		/	/	/

En plaçant
- les racines : 0, ± $\sqrt{2}$
- les maximums : (-1, -1) et (1,1)
- et le point d'inflexion (0, 0)

le tableau de variation nous permet d'obtenir le graphe ci-contre.



3.3 Exemple 3

Considérons la fonction f(x) = $\sqrt{x\,(2x - 1)^2}$
dom f = [0, + ∞[f(0) = 0   racines : x = 0 et x = 1/2
Le domaine nous permet d'affirmer qu'il n'y a pas d'asymptote verticale (car pas de point adhérent au domaine et n'appartenant pas à ce domaine).
La recherche des éventuelles asymptotes horizontales ou obliques n'est possible qu'en + ∞ vu le domaine.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{4x^3} = +\infty \Rightarrow$ pas d'asymptote horizontale.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{4x^3}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{4x} = +\infty \Rightarrow$ pas d'asymptote oblique.

N.B. En $\pm\infty$, un polynôme se comportant "comme" son terme du plus haut degré (ici 3). La fonction f(x) va donc se comporter "comme" une fonction de degré $\dfrac{3}{2}$ et n'admet donc pas d'asymptote horizontale ou oblique.

$f'(x) = \dfrac{12x^2-8x+1}{2\sqrt{x(2x-1)^2}} = \dfrac{(2x-1)(6x-1)}{2\sqrt{x(2x-1)^2}}$ racines : $\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{1}{6}$

$f''(x) = \dfrac{12x^2-4x-1}{4x\sqrt{x(2x-1)^2}} = \dfrac{(2x-1)(6x+1)}{4x\sqrt{x(2x-1)^2}}$ racines du numérateur : $\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{-1}{6}$ (où f'' n'est pas définie)

En remarquant que là où il est défini, le dénominateur est positif, on obtient le tableau de signes suivant :

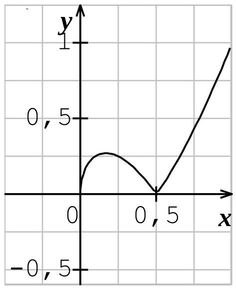
		$-\frac{1}{6}$		0		$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{2}$	
f '	/	/	/	/	+	0	-	|	+
f ''	/	/	/	/	-	-	-	|	+
f	/	/	/		↗	max	↘	0	↗
f	/	/	/		∩	∩	∩	0	∪

Le calcul de f(1/6) = 0,27 nous permet de situer le maximum et ainsi de tracer le graphique.
Cette fonction a un comportement particulier au point (0.5, 0)

En effet $f_g'(0.5) = \lim\limits_{\substack{< \\ x\to 0.5}} \dfrac{(2x-1)(6x-1)}{2\sqrt{x(2x-1)^2}} = -\sqrt{2}$

et $f_d'(0.5) = \lim\limits_{\substack{> \\ x\to 0.5}} \dfrac{(2x-1)(6x-1)}{2\sqrt{x(2x-1)^2}} = \sqrt{2}$

Le point (0.5, 0) est un point anguleux.



Pour rappel :

<u>Définition</u> : Un point du graphe d'une fonction est un point anguleux ssi la dérivée à gauche de ce point n'est pas égale à la dérivée à droite et que l'une de ces dérivées au moins n'est pas infinie.

<u>Remarque :</u>
Dans l'exercice précédent, les calculs de dérivées assez longs peuvent être simplifiés en remarquant que

$f(x) = \sqrt{x(2x-1)^2} = \sqrt{x}\,|2x-1|$

Constatons : si x < 1/2 alors $f(x) = f_1(x) = (1-2x)\sqrt{x}$ et si x > 1/2 : $f(x) = f_2(x) = (2x-1)\sqrt{x}$

$f_1'(x) = \dfrac{-6x+1}{2\sqrt{x}}$ sa racine : 1/6 $\qquad f_2'(x) = \dfrac{6x-1}{2\sqrt{x}}$ sa racine : 1/6

$f_1''(x) = \dfrac{-6x-1}{4x\sqrt{x}}$ sa racine : - 1/6 $\qquad f_2''(x) = \dfrac{6x+1}{4x\sqrt{x}}$ sa racine : - 1/6

On retrouve alors le tableau de signes obtenu précédemment.

3.4 Exemple 4

Soit $f(x) = \sqrt{|4x-3|}$: comme dans l'exemple précédent, la fonction peut être décomposée en deux parties :

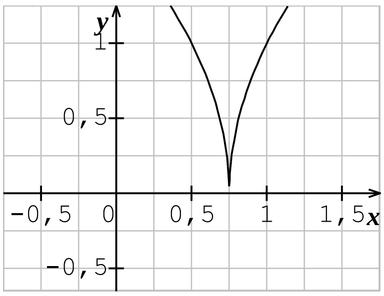
Si $x \le 0.75 \Rightarrow f(x) = f_1(x) = \sqrt{-4x+3}$ et si $x \ge 0.75 \Rightarrow f(x) = f_2(x) = \sqrt{4x-3}$

Par les graphes déduits, nous obtenons aisément le graphe ci-contre.
Cette fonction a un comportement particulier au point (0.75, 0)

En effet $f_g'(0.75) = \lim\limits_{\substack{x \to 0.75 \\ <}} \frac{-2}{\sqrt{-4x+3}} = -\infty$

et $f_d'(0.75) = \lim\limits_{\substack{x \to 0.75 \\ >}} \frac{-2}{\sqrt{4x-3}} = +\infty$

Le point (0.75, 0) est un point de rebroussement.
Pour rappel :



<u>Définition</u> : Un point du graphe d'une fonction est un point de rebroussement ssi la dérivée à gauche de ce point n'est pas égale à la dérivée à droite et que ces deux dérivées sont infinies.

<u>Remarque</u> : il arrive que dans le cas de fonctions irrationnelles, il soit particulièrement difficile de calculer f ".
Le calcul de certaines valeurs de la dérivée pourra alors nous éclairer sur le sens de la concavité.

3.5 Exercices :

3.5.1 Etudier les variations des fonctions suivantes : (choisir la méthode la plus efficace et ne pas calculer f ")

1. $f(x) = \sqrt{x^2-1}$
2. $f(x) = -\sqrt{x^2-1}$
3. $f(x) = \sqrt{1-x^2}$
4. $f(x) = \sqrt{\frac{2x-3}{2x-5}}$
5. $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x-4}}$
6. $f(x) = \sqrt{4x^2-9x+6}$
7. $f(x) = \sqrt{(1-2x)^2(1+2x)}$
8. $f(x) = \sqrt{3+|x+2|}$
9. $f(x) = \sqrt{x(x-2)^2}$
10. $f(x) = \sqrt{|2x-1|}$
11. $f(x) = \sqrt{x^3-x}$
12. $f(x) = \sqrt{-x^3+7x-6}$
13. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$
14. $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x-1}$
15. $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{1+x^2}}$

3.5.2 Exercices de prolongement : étudier les variations des fonctions suivantes

1. $f(x) = \frac{\sqrt{|2x-1|}}{x}$
2. $f(x) = \frac{\sqrt{|1-3x|}}{2x-1}$
3. $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x+2}$
4. $f(x) = \frac{\sqrt{-2x+3}}{x^2-2x+1}$
5. $f(x) = \sqrt[3]{x^3-x}$
6. $f(x) = \sqrt[3]{x^3-x^2}$

4. Applications des fonctions irrationnelles.

1. Le passager d'une barque située à 2 km du point le plus proche de la rive désire atteindre la maison située au bord de l'eau à 6 km en aval. Etudier le temps mis pour effectuer le trajet en fonction du point où il accoste , sachant qu'il se déplace à 3 km/h à la rame et 5 km/h à pied
2. Etudier les variations du périmètre d'un triangle isocèle circonscrit à un cercle de rayon R.
3. La demande de Q unités d'un produit est liée à son prix par la relation suivante : la demande est de 5000 unités moins une quantité directement proportionnelle au carré du prix .
   a) Donner l'expression de la demande si pour un prix de 10€ , la demande est de 1000 unités.
   b) Etudier la recette en fonction de la quantité vendue.
4. Deux rues se coupent à angle droit en un point P. L'une a la direction nord-sud, l'autre la direction est-ouest. Une voiture A venant de l'ouest et se dirigeant vers l'est passe en P à une vitesse de 20 km/h. Au même instant, une autre voiture B, située à 2 km au nord du croisement, se dirige vers celui-ci à 50 km/h
   a) Etudier la variation de la distance entre ces 2 voitures par rapport au temps
   b) Préciser le moment où ces 2 voitures seront les plus proches.

5. Règle de l'Hospital.

Beaucoup de calculs de limites peuvent être simplifiés par cette règle. Prenons une première situation d'application de celle-ci.
Soit I, un intervalle de centre a

f, g : I $\rightarrow$ R, dérivables sur I et telles que f(a) = g(a) = 0 alors, on peut montrer $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

5.1 Exemple 1

Soit f(x) = $\frac{2x^3-3x^2+1}{x^3-3x+2}$ $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \frac{0}{0}$: nous sommes bien dans les conditions d'application de la règle de l'Hospital. $\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}\frac{(2x^3-3x^2+1)'}{(x^3-3x+2)'} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{6x^2-6x}{3x^2-3} = \frac{0}{0}$

En appliquant une seconde fois la règle de l'Hospital : $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}\frac{12x-6}{6x} = \frac{6}{6}$ = 1 (Solution que l'on peut retrouver en factorisant numérateur et dénominateur afin de déterminer un prolongement continu …)

5.2 Exemple 2

soit f(x) = $\frac{\sqrt{2x+3}-3}{x-3}$ $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = \frac{0}{0}$: on peut donc appliquer la règle.

$\lim\limits_{x\to 3} f(x) = \lim\limits_{x\to 3}\frac{\frac{2}{2\sqrt{2x+3}}}{1} = \frac{1}{3}$ (solution que l'on peut retrouver en multipliant par le binôme conjugué…)

5.3 Généralisation.

Cette règle s'applique également lorsque a est infini ou lorsqu'on obtient un cas d'indétermination du type $\frac{\infty}{\infty}$

si f, g dérivables sur I $\ni$ a et si $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ = une indétermination du type $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty} \Rightarrow \lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$
si f, g dérivables sur]a, + ∞ [et si $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$ = indétermination du type $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty} \Rightarrow \lim\limits_{x\to +\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to +\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$
si f, g dérivables sur]- ∞, a[et si $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$ = indétermination du type $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty} \Rightarrow \lim\limits_{x\to -\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to -\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

5.4 Exercices.

Calculer les limites suivantes (selon les cas, on s'apercevra que la règle de l'Hospital amène souvent une simplification des calculs, mais qu'elle peut parfois les alourdir : un choix s'impose)

1. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x^2-6x+8}$
2. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{3x^2-2x-1}}{\sqrt{2x^2-x-1}}$
3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1+x}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-x^2}}$
4. $\lim\limits_{x\to 4}\frac{(x-3)^{2/3}-1}{x-4}$
5. $\lim\limits_{x\to 7}\frac{(x-5)^{4/3}-2\sqrt[3]{2}}{x-7}$
6. $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{2x-5}}{x+3}$

5.5 Limites de fonctions trigonométriques.

5.5.1 Généralités.

Nous avons montré que $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ = 1 (x exprimé en radians). Ceci se vérifie aisément par la règle de l'Hospital.

En effet, nous avons une indétermination de type $\frac{0}{0}$, donc $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{x'} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}$ =1

Pour les calculs de limites de fonctions trigonométriques nous appliquerons les règles habituelles.

5.5.2 Exercices.

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x \to \frac{3\pi}{2}} \dfrac{1}{\cos x}$
2. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{1}{\sin x - 1}$
3. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{\cos x - 1}$
4. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{1}{1 - \tan x}$
5. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{x}{\cos x}$
6. $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{x - 1}{\tan x}$
7. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{2x}$
8. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 3x}{x}$
9. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 3x}{\sin 2x}$
10. $\lim\limits_{a} \dfrac{\sin x - \sin a}{x - a}$
11. $\lim\limits_{-\frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x}{2\sqrt{1 + \sin x}}$
12. $\lim\limits_{0} \left(\sin x \ \dfrac{\tan x}{x^2} \right)$
13. $\lim\limits_{0} \dfrac{\cos x - \cos 3x + \sin 2x}{\sin x + \sin 3x}$
14. $\lim\limits_{0} \dfrac{x \sin ax}{1 - \cos bx}$
15. $\lim\limits_{1} (x^2 - 1) \cot (\pi x)$