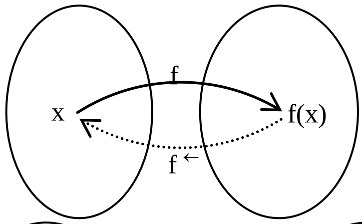
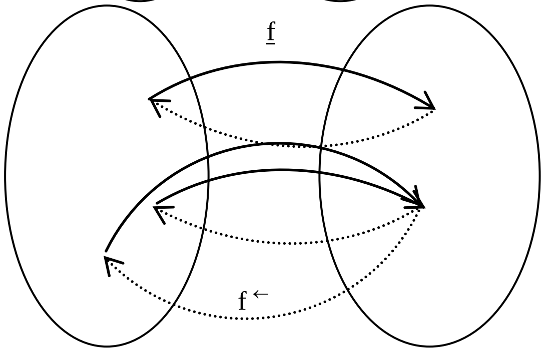
II. Fonctions cyclométriques.

1. Introduction

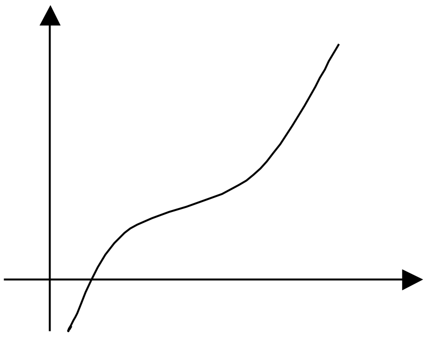


Etant donné une fonction f : A → R x → f(x),
connaissant f(x), peut-on retrouver x ?
C'est la fonction réciproque qui nous le permettra.

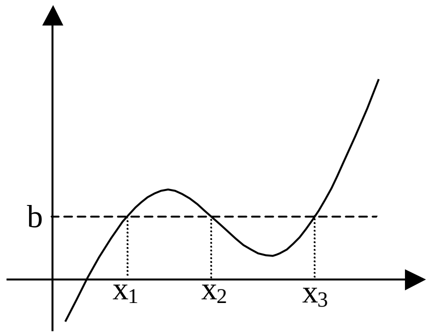


Pour que la réciproque d'une fonction soit une fonction, il faut que la fonction initiale soit injective (c'est à dire qu'un réel ne peut être image de plusieurs points).
En effet, si ce n'était pas le cas, un point aurait plusieurs images par la fonction réciproque comme le montre le schéma ci-contre, et il ne s'agirait plus alors d'une fonction.

Le graphe cartésien d'une fonction nous permet facilement de dire si cette fonction est injective ou pas : il suffit d'observer si ce graphe comporte plusieurs points de même ordonnée



Fonction injective
Tout y est image d'au plus une valeur de x.

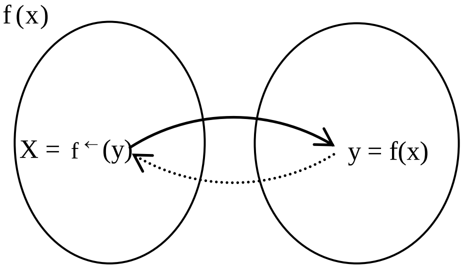


Fonction non injective
b est image de 3 points : x_1, x_2 , et x_3

<u>Remarque :</u>
f : A → B est injective ssi tout élément de B est image par f d'au plus un élément de A
f : A → B est surjective ssi tout élément de B est image par f d'au moins un élément de A
f : A → B est bijective ssi tout élément de B est image par f d'un et un seul élément de A

2. La fonction réciproque : définition

Si f : A → R : x → f(x) est une fonction injective
Soit f(A), l'ensemble des réels images par f d'au moins une valeur de x.
alors : $f^{\leftarrow} : f(A) \rightarrow A : y \rightarrow f^{\leftarrow}(y) = x$ avec $f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{\leftarrow}(y)$
<u>Remarque</u> : de nombreux manuels utilisent le signe f^{-1} pour dénoter la fonction réciproque, mais nous préférerons $f^{\leftarrow}$ afin de ne pas confondre avec la fonction $(f(x))^{-1} = \dfrac{1}{f(x)}$

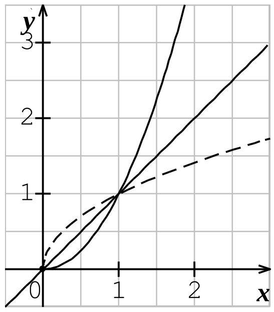


Nous avons donc $f(f^{\leftarrow}(y)) = y$

ainsi que $f^{\leftarrow}(f(x)) = x$

3. Une fonction et sa réciproque : lien entre leurs graphes.

Considérons la fonction f : R $\rightarrow$ R : x $\rightarrow$ f(x) = x^2



Cette fonction n'étant pas injective, afin de pouvoir parler de réciproque, on considèrera sa restriction à R^+ c'est à dire :

g : $R^+ \rightarrow R^+$ x $\rightarrow$ g(x) = x^2

et $g^{\leftarrow}$: $R^+ \rightarrow R^+$ x $\rightarrow g^{\leftarrow}$ (x) = $\sqrt{x}$

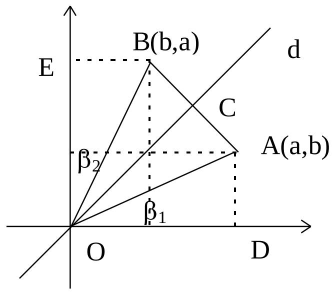
Le graphique ci-contre reprend le graphe de g(x) (trait plein), celui de $g^{\leftarrow}$ (x) (tirets) ainsi que celui de la fonction h(x) = x

Nous observons : (a,b) $\in G_g \Leftrightarrow$ b = $a^2 \Leftrightarrow$ a = $\sqrt{b}$ $\Leftrightarrow$ (b,a) $\in$ G réciproque

Graphiquement, nous constatons que ces points sont symétriques par rapport à la droite y = x (première bissectrice des axes de coordonnées)

On peut refaire le même travail pour les fonctions f(x) = x^3 et $f^{\leftarrow}$ (x) = $\sqrt[3]{x}$

Il semblerait donc que les graphes de deux fonctions réciproques l'une de l'autre soient symétriques par rapport à la droite y = x. Démontrons-le.



Hypothèse : Soient 2 points A(a,b)$\in G_f$ et B(b,a) $\in G_{f^{\leftarrow}}$ (considérons le cas où A et B $\in$ 1[er] quadrant, la démonstration étant semblable pour les autres cas)

Thèse : A et B sont symétriques par rapport à la droite d $\equiv$ y = x

Démonstration :

Les côtés des angles droits des Δ rectangles OAD et OEB sont respectivement égaux ($\overline{OE} = \overline{OD}$ = a et $\overline{EB} = \overline{AD}$ = b)$\Rightarrow$ ces triangles sont isométriques

$\Rightarrow$ a) leurs hypoténuses sont égales : $\overline{OB} = \overline{OA}$ $\Rightarrow$ le Δ OAB est isocèle.

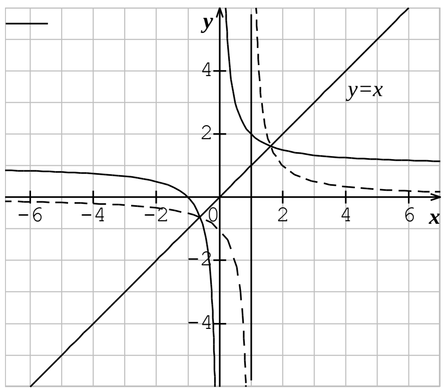
b) leurs angles correspondants sont égaux : $\beta_1 = \beta_2$

$\Rightarrow$ 45° - β_1 = 45° - β_2, $\Leftrightarrow$ d est bissectrice du triangle 0AB

Comme le Δ OAB est isocèle : d est aussi hauteur et médiatrice du Δ OAB $\Rightarrow$ $\overline{BC} = \overline{CA}$ et AB $\perp$ d $\Leftrightarrow$ A et B sont symétriques par rapport à d.

Conclusion : les graphes d'une fonction et de sa réciproque sont images l'un de l'autre par une symétrie orthogonale d'axe y = x : bissectrice principale des axes de coordonnées.

Asymptotes.



Si le graphe d'une fonction admet une asymptote verticale x = a, alors le graphe de sa réciproque admet une asymptote horizontale y = a et inversement.

Le graphique ci-contre illustre le cas de la fonction

f(x) = $\dfrac{1}{x-1}$ et de sa réciproque g(x) = $\dfrac{1}{x}$ + 1

f(x) admet pour AV la droite d $\equiv$ x = 1 et pour AH la droite d' $\equiv$ y =0

g(x) admet pour AV la droite $d_1 \equiv$ x = 0 et pour AH la droite $d_1' \equiv$ y = 1

Exercices

Déterminer la fonction réciproque de chacune des fonctions suivantes et en déduire le graphe de cette fonction.

1. f(x) = $\sqrt{x+1}$
2. f(x) = $\sqrt[3]{x-3}$

Nous allons maintenant considérer les fonctions réciproques des fonctions trigonométriques appelées fonctions cyclométriques et étudier leur comportement à partir des fonctions de base.

4. La fonction arccos x

Nous savons que la fonction cosinus est une fonction R → R : x → f(x) = cos x
Cette fonction n'étant pas injective, considérons sa restriction à [0,π] afin de pouvoir définir sa réciproque, appelée arccos x

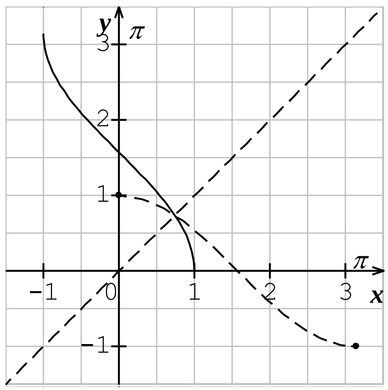
4.1 Définition :

arccos : [-1, 1] → [0,π]   x → arccos x est l'application qui est définie de manière telle que
$x \in [-1, 1]$ et $y = \arccos x \Leftrightarrow x = \cos y$ et $y \in [0,\pi]$

<u>Remarque</u> :
Nous avons : $\forall\ x \in [-1 ; 1] : \cos(\arccos x) = x$
Et de même : $\forall\ x \in [0, \pi] : \arccos(\cos x) = x$

<u>*Exemple*</u>s: $\arccos 1 = 0$ $\arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$ $\arccos(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{5\pi}{6}$

A partir des observations que nous avons faites sur les graphes des fonctions réciproques, nous pouvons aisément obtenir celui d'arccos x



Sur un même graphique, traçons
f(x) = cos x $x \in [0,\pi]$ (tirets)
$f^{\leftarrow}(x) = \arccos x$ $x \in [-1,1]$ (trait plein)
et enfin d ≡ y = x, bissectrice principale.
Nous obtenons alors les graphes ci-contre.

La fonction arccos x est donc une fonction décroissante entre - 1 et 1.
Sa racine : x = 1.   f(0) = π/2

4.2 Application.

si y = arccos x $0 \le y \le \pi$, exprimer sin y, cos y et tan y en fonction de x.
Nous avons directement cos y = cos (arccos x) = x
et $\sin(\arccos x) = \pm\sqrt{1-\cos^2(\arccos x)} = \pm\sqrt{1-x^2}$ et comme $0 \le \arccos x \le \pi$

$\Rightarrow \sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2} \Rightarrow \tan(\arccos x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

4.3 Dérivée :

$y = \arccos x \Leftrightarrow \cos y = x \Rightarrow (\cos y)' = x' \Leftrightarrow -\sin y \cdot y' = 1 \Leftrightarrow y' = \frac{-1}{\sin y} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

<u>Généralisation : dérivée de la fonction réciproque</u> :
Nous savons : $(f \circ f^{\leftarrow})(x) = x \Rightarrow f'(f^{\leftarrow}(x)) \cdot (f^{\leftarrow}(x))' = 1$

$$\boxed{(f^{\leftarrow}(x))' = \frac{1}{f'(f^{\leftarrow}(x))}}$$

Dans notre cas nous obtenons : $(\arccos x)' = \frac{1}{\cos'(\arccos x)} = \frac{1}{-\sin(\arccos x)} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

A partir des règles de dérivation de la composée de 2 fonctions nous obtenons $(\arccos f(x))' = \frac{-f'(x)}{\sqrt{1-(f(x))^2}}$

<u>*conclusion:*</u> $\boxed{(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (\arccos f(x))' = \frac{-f'(x)}{\sqrt{1-(f(x))^2}}}$

<u>*Exercices*</u> : Déterminer le domaine des fonctions suivantes et calculer leur dérivée :
1. (arccos(3x-1)) ' =
2. $(\arccos x^2)'$ =

5. La fonction arcsin x

De même, la fonction arcsin x est la réciproque de la restriction de la fonction sinus R → R x → f(x) = sin x.
à l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ (pour que cette restriction soit injective).

5.1 Définition :

arcsin : [-1, 1] → [- $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$] x → arcsin x est l'application qui est définie de manière telle que

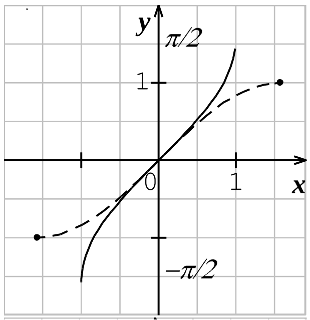
x ∈ [- 1, 1] et y = arcsinx ⇔ x = sin y et y ∈ [- $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$]

<u>Remarque</u> :
Nous avons : ∀ x ∈ [-1 ; 1] : sin (arcsin x) = x
Et de même : ∀ x ∈ $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$: arcos (cos x) = x

<u>Exemple</u> : arcsin 1 = $\frac{\pi}{2}$ arcsin $\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$ arcsin (-1) = - $\frac{\pi}{2}$

Comme dans le cas d'arccos x, nous trouvons le graphe d'arcsin x à partir de celui de sin x

Sur le graphique ci-contre, nous reprenons les graphes des fonctions suivantes :



f(x) = sin x x ∈ $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ (tirets)

$f^{\leftarrow}(x)$ = arcsin x x ∈ [-1, 1] (trait plein)

et la droite d ≡ y = x (bissectrice principale)

la fonction arcsin x est donc une fonction croissante entre -1 et 1, qui admet une racine en x = 0

5.2 Application.

si y = arcsin x - $\frac{\pi}{2}$ ≤ y ≤ $\frac{\pi}{2}$, exprimer sin y, cos y et tan y en fonction de x.
Nous obtenons directement sin y = x
or cos y = ± $\sqrt{1-\sin^2 y}$ et comme - $\frac{\pi}{2}$ ≤ y ≤ $\frac{\pi}{2}$ alors cos y = $\sqrt{1-\sin^2 y} = \sqrt{1-x^2}$ ⇒ tan y = $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

5.3 Dérivée :

y = arc sin x ⇔ sin y = x ⇒ (sin y)' = x ' ⇔ cos y . y ' = 1 ⇔ y ' = $\frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

A partir des règles de dérivation de la composée de 2 fonctions nous obtenons (arcsin f(x)) ' = $\frac{f'(x)}{\sqrt{1-(f(x))^2}}$

<u>conclusion</u> :

$$\boxed{(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (\arcsin f(x))' = \frac{f'(x)}{\sqrt{1-(f(x))^2}}}$$

<u>Exercices</u> : Déterminer le domaine des fonctions suivantes et calculer leur dérivée :
1. (arcsin 2x) ' =
2. (arcsin $5x^2$) ' =
3. (arcsin $\frac{1}{x}$) ' =

5.4 Remarque :

arccos x = $\frac{\pi}{2}$ - arcsin x

en effet : arccos x = y $\Leftrightarrow$ cos y = x et y $\in$ [0, π]

Pour vérifier l'égalité, il faut donc montrer que cos ($\frac{\pi}{2}$ - arcsin x) = x et que $\frac{\pi}{2}$ - arcsin x $\in$ [0, π]

or : cos ($\frac{\pi}{2}$ - arcsin x) = sin (arcsin x) = x (angles complémentaires)

et $-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} \geq -\arcsin x \geq -\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \pi \geq \frac{\pi}{2} - \arcsin x \geq 0$ (cqfd)

6. La fonction arctan x

Nous savons que la fonction tan est une fonction de R/{ $\frac{\pi}{2}$ + k π } $\rightarrow$ R : x $\rightarrow$ f(x) = tan x.

La fonction arctan x est la réciproque de la restriction de cette fonction à l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

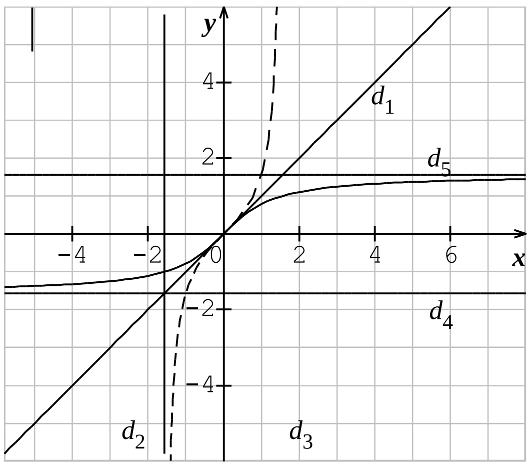
6.1 Définition :

arctan : R $\rightarrow$]- $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$ [x $\rightarrow$ arctan x est l'application qui est définie de manière telle que

x $\in$ R et y = arctan x $\Leftrightarrow$ x = tan y et y $\in$]- $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$ [

Exemple : arctan 1 = $\frac{\pi}{4}$ arctan $\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{6}$ arctan $\left(-\sqrt{3}\right) = -\frac{\pi}{3}$

Comme précédemment, à partir des observations sur les graphes des fonctions réciproques, nous trouvons le graphe d'arctan x



Le graphique ci-contre reprend les fonctions

f(x) = tan x   x $\in$ $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ (tirets)

$f^{\leftarrow}$(x) = arctan x   x $\in$ R (trait plein)

ainsi que les droites $d_1 \equiv y = x$ (bissectrice principale)

$d_2 \equiv x = -\frac{\pi}{2}$, $d_3 \equiv x = \frac{\pi}{2}$ (Asymptotes verticales du graphe de tan x)

et enfin, les droites :$d_4 \equiv y = -\frac{\pi}{2}$ et $d_5 \equiv y = \frac{\pi}{2}$

(Asymptotes horizontales du graphe d'arctan x)

Remarquons que les droites d_4 et d_5 sont respectivement symétriques de d_2 et d_3 par rapport à la droite y = x

La fonction arctan x est donc une fonction constamment croissante. Elle admet pour racine x = 0,

et admet les limites suivantes : $\lim\limits_{x \to +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$

6.2 Application.

si y = arctan x avec $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$, exprimer tan y, sin y, cos y et cot y en fonction de x

6.3 Dérivée :

y = arc tan x $\Leftrightarrow$ tan y = x $\Rightarrow$ (tan y)' = x ' $\Leftrightarrow$ (1 + tan ^{2} y) . y ' = 1 $\Leftrightarrow$ y ' = $\frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$

A partir des règles de dérivation de la composée de 2 fonctions nous obtenons (arctan f(x)) ' = $\frac{f'(x)}{1+(f(x))^2}$

<u>conclusion</u> :

$$\text{(arctan x) ' = } \frac{1}{1+x^2} \qquad \text{(arctan f(x)) ' = } \frac{f'(x)}{1+(f(x))^2}$$

<u>Exercices</u> : Déterminer le domaine des fonctions suivantes et calculer leur dérivée :
1. (arctan $3x^2$) ' =
2. (arctan x^3) ' =

7. La fonction arccot x

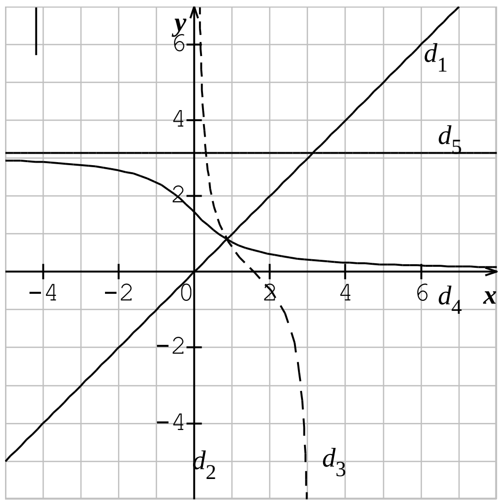
La fonction cotangente est une fonction R $\to$ R : x $\to$ f(x) = cot x
La fonction arccot x est la réciproque de la restriction de cette fonction à l'intervalle]0,π[

7.1 Définition :

arccot : R $\to$]0,π[x $\to$ arccot x est l'application qui est définie de manière telle que
x $\in$ R et y = arccot x $\Leftrightarrow$ x = cot y et y $\in$]0,π[

<u>Exemple</u> : arccot 0 = $\frac{\pi}{2}$ arccot (-1) =- $\frac{\pi}{4}$ arccot $\frac{\sqrt{3}}{3}$ =...........

A nouveau, nous obtenons le graphe de la fonction arccot x à partir de celui de cot x :



Le graphique ci-contre reprend les fonctions
f(x) = cot x x $\in$]0,π[(tirets)
g(x) = arcot x x $\in$ R (trait plein)
ainsi que les droites $d_1 \equiv y = x$ (bissectrice principale)
$d_2 \equiv x = \pi$ et $d_3 \equiv x = 0$ (asymptotes du graphe de cot x)
et enfin les droites :
$d_4 \equiv y = \pi$ et $d_5 \equiv y = 0$ (asymptotes du graphe d'arccot x)
Ces deux dernières sont respectivement symétriques des deux précédentes par rapport à la bissectrice principale.

La fonction arccot x est donc une fonction constamment décroissante. Elle n'admet pas de racine ,
f(0) = $\frac{\pi}{2}$ admet les limites suivantes :
$\lim\limits_{x\to+\infty}$ arccot x = 0 et $\lim\limits_{x\to-\infty}$ arccot x = π

<u>Application</u>.
si y = arccot x 0 < y < π, exprimer sin y, cos y , tan y et cot y en fonction de x.

7.2 Propriété :

Comme dans le cas d'arcsin et arccos, on peut montrer : arccot x = $\frac{\pi}{2}$ - arctan x

en effet : arccot x = y $\Leftrightarrow$ cot y = x et y $\in$]0, π[

Pour vérifier l'égalité, il faut donc montrer que cot ($\frac{\pi}{2}$ - arctan x) = x et que $\frac{\pi}{2}$ - arctan x $\in$]0, π[

or : cot ($\frac{\pi}{2}$ - arctan x) = tan (arctan x) = x (angles complémentaires) et $-\frac{\pi}{2} < \arctan x < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} > -\arctan x > -\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \pi > \frac{\pi}{2} - \arctan x > 0$ (cqfd)

7.3 Dérivée :

$y = \text{arccot } x \Leftrightarrow \cot y = x \Rightarrow (\cot y)' = x' \Leftrightarrow -(1+\cot^2 y) \cdot y' = 1 \Leftrightarrow y' = \frac{-1}{1+\cot^2 y} = \frac{-1}{1+x^2}$

A partir des règles de dérivation de la composée de 2 fonctions nous obtenons $(\text{arccot } f(x))' = \frac{-f'(x)}{1+(f(x))^2}$

conclusion :

$$\boxed{(\text{arccot } x)' = \frac{-1}{1+x^2} \qquad (\text{arccot } f(x))' = \frac{-f'(x)}{1+(f(x))^2}}$$

Exercices : Déterminer le domaine des fonctions suivantes et calculer leur dérivée :
1. $(\text{arccot } (3x-1))' =$
2. $(\text{arccot } x^2)' =$

8. Exercices généraux.

8.1 Vérifier les identités suivantes :

1. $\forall x \in]-1, 1[: \tan(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$
2. $\forall x \in R : \sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ $\qquad \cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
3. $\forall x \in [-1, 1] : \cot(\arcsin x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$
4. $\forall x \in R_0^+ : \arctan \frac{1}{x} = \text{arccot } x$
5. $\forall a \in [1, +\infty[: \arcsin \frac{a-1}{a+1} = \arccos \frac{2\sqrt{a}}{a+1}$

8.2 Déterminer les domaines et calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $\arccos(3x^2 - 1) =$
2. $\frac{\arcsin(x+1)}{\arccos(x+1)} =$
3. $\arctan \frac{x+1}{3x+2} =$
4. $x^2 \arctan x^2 =$

8.3 Déterminer z en fonction de x et y si :

1. $\arctan x + \arctan y = \arctan z$
2. $\text{arc sin } x + \text{arc sin } y = \text{arc sin } z$
3. $\arcsin x + \arccos y = \arctan z$

8.4 Vérifier (sans utiliser la calculatrice) :

1. $\arctan \frac{1}{3} + \arctan \frac{1}{2} = \frac{\pi}{4}$
2. $\arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{5} + \arctan \frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}$
3. $\text{arccot } \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} - \arctan 1 = \text{arccot } \sqrt{2}$
4. $\arctan \frac{1}{7} + 2 \text{ arccot } 3 = \frac{\pi}{4}$
5. $\arcsin \frac{\sqrt{5}}{5} + \arctan \frac{1}{3} = \text{arccot } 1$
6. $\arcsin \frac{\sqrt{5}}{3} + \arcsin \frac{2}{3} = \frac{\pi}{2}$

8.5 Résoudre les équations suivantes

1. $x = \arccos \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \arctan 1$
2. $\arctan x + \arctan \sqrt{3} = \dfrac{\pi}{4}$
3. $\arccos x = \arctan \dfrac{3}{4}$
4. $\arctan x - \operatorname{arccot} \dfrac{8}{5} = \arctan \dfrac{3}{8}$
5. $\arctan (x - 1) + \arctan \dfrac{1}{x+1} = \arctan x$

8.6 Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arctan x}{\arcsin x}$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\arctan x - x}{2x - \arcsin x}$
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arctan x - x}{x - \arcsin x}$
4. $\lim\limits_{x\to 1} \arctan \dfrac{1}{x-1}$
5. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}} \operatorname{arccot} \dfrac{x}{x - \frac{\pi}{3}}$

<u>Solutions :</u> 1) 1 2) 1 3) 2 4) $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ < \\ >}} f(x) = \mp \dfrac{\pi}{2}$ 5) $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{\pi}{3} \\ <}} f(x) = \pi$ et $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{\pi}{3} \\ >}} f(x) = 0$

8.7 Etudier les variations des fonctions suivantes :

8.7.1 A partir des propriétés des fonctions déduites (et préciser leur domaine et leurs racines)

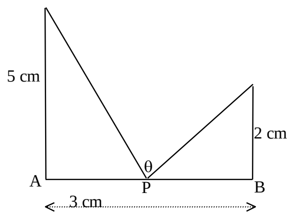
1. $f(x) = 2 \arccos 2x$
2. $f(x) = 1 - \arcsin (x + 1)$
3. $f(x) = \arcsin(1 - \frac{x}{2})$
4. $f(x) = \dfrac{1}{\arcsin \left(1 - \frac{x}{2}\right)}$
5. $f(x) = 1 + \arccos 2x$
6. $f(x) = 1 - \arctan x$
7. $f(x) = \dfrac{1}{1 - \arctan x}$
8. $f(x) = \arctan (x - \pi)$
9. $f(x) = \dfrac{\arctan 2x}{2}$

8.7.2 *Par une étude complète :

1. $f(x) = \arcsin \dfrac{1}{x}$
2. $f(x) = \arctan (1 - x^2)$
3. $f(x) = \arccos x^2$
4. $f(x) = \arcsin (\sin x)$

8.8 Problèmes

1. Dans le schéma suivant, où faut-il situer le point P (sur la droite AB) pour que l'angle θ soit maximum ?



2. Un panneau publicitaire de 6 m de haut est placé sur le toit d'un building et son bord inférieur est ainsi 18 m plus haut que les yeux d'un observateur. A quelle distance doit se mettre cet observateur juste en dessous de l'enseigne pour que son angle de vue θ entre le bord inférieur et le bord supérieur de l'enseigne soit le plus grand possible ? (A cet angle correspond la meilleure vue du panneau). sol : d = 20,78 m

3. Un tableau de hauteur h est exposé dans une galerie d'art et le bord inférieur du cadre est à une hauteur a au-dessus du niveau de l'oeil du visiteur (voir figure). A quelle distance le visiteur doit-il se tenir pour avoir la meilleure vue ? (Autre formulation : où doit-il se mettre pour que l'angle d'ouverture θ soit le plus grand possible ?)