X. Equations paramétriques d'une courbe. Coordonnées polaires.

1. Equations paramétriques

Soient deux équations $\begin{cases} x = f(\lambda) \\ y = g(\lambda) \end{cases}$ où $\lambda \in$ intervalle [a, b]

A chaque valeur de λ correspondent une valeur de x et une valeur de y. Si l'on considère ces valeurs comme les coordonnées d'un point du plan, à chaque valeur de λ, correspondra un point du plan. Quand λ varie de a à b, ces points décrivent une courbe. Le système (*) est appelé système d'équations paramétriques de cette courbe. λ est le paramètre du système.
C'est le cas notamment en physique lorsqu'on décrit un mouvement en exprimant l'abscisse et l'ordonnée du mobile en fonction du temps : $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$ $t \in [a, b]$ (intervalle de temps durant lequel on étudie le mouvement)

On obtient l'équation cartésienne de la courbe en éliminant le paramètre entre les deux équations (on exprime λ dans une équation et on remplace dans l'autre)

1.1 Exemple 1

Déterminer la trajectoire et le point de chute d'un corps lâché d'un avion se déplaçant horizontalement à la vitesse v_0 à l'altitude y_0. On néglige la résistance de l'air.

Choisissons le repère tel que la position initiale du corps soit le point $(0, y_0)$
Décrivons le déplacement horizontal du corps et son déplacement vertical.
Comme on néglige la résistance de l'air, le déplacement horizontal sera un mouvement uniforme de vitesse constante $v_0 \Rightarrow x = v_0\, t$
Le déplacement vertical d'un corps tombant sous l'effet de la pesanteur s'exprime par $d = \frac{1}{2}\, gt^2$
Par conséquent, la distance du corps à la terre sera donnée par : $y = y_0 - \frac{1}{2}\, gt^2$

Les équations : $\begin{cases} x = v_0 t \\ y = \frac{1}{2} gt^2 \end{cases}$ sont les équations paramétriques de la trajectoire.

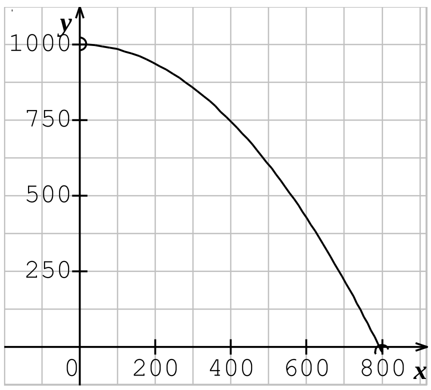
Pour éliminer le paramètre, nous exprimons celui-ci dans la première équation : $t = \dfrac{x}{v_0}$

En remplaçant t par cette valeur dans la seconde équation, nous obtenons : $y = y_0 - \dfrac{g\, x^2}{2v_0^2}$

Cette dernière équation est celle d'une parabole de sommet $S(0, y_0)$ et dont l'axe de symétrie coïncide avec l'axe des ordonnées.

Pour déterminer le point de chute, il suffit de calculer l'abscisse du point d'ordonnée nulle c.-à-d. $X = v_0 \sqrt{\dfrac{2y_0}{g}}$

Considérons le cas d'un avion volant à une altitude de 1000m à la vitesse constante de 200 km/h.
En exprimant la vitesse en m/s, nous obtenons l'équation de la trajectoire : $y = 1000 - \dfrac{9.81}{2} \dfrac{x^2}{(55.56)^2}$ dont le graphique est repris ci-contre.
La coordonnée du point de chute vaut alors : (793.3 ; 0)



1.2 Exemple 2 : la courbe de Lissajous

Soit la courbe d'équation : $\begin{cases} x = \sin 2t \\ y = \cos t \end{cases}$ où t est exprimé en radians et $t \in [0, 2\pi]$

En éliminant le paramètre entre ces équations, nous obtenons la relation : $x^2 = 4\,y^2\,(1-y^2)$

Cherchons quelques points de la courbe :

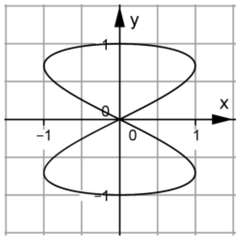
t	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
x	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0
y	1	0.7	0	-0.7	-1	-0.7	0	0.7	1

Remarquons que les points obtenus pour t = 0 et t = 2π sont identiques et de même pour toute valeur t et t + 2π

Et nous obtenons le graphique suivant.

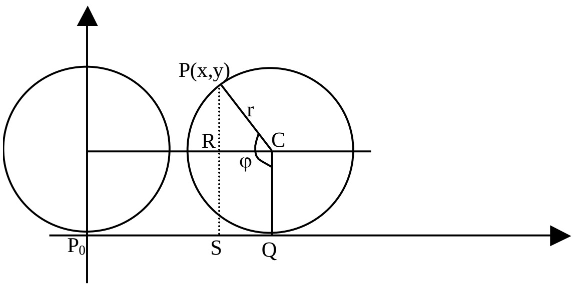
La courbe de Lissajous est une courbe fermée complexe.

Le cercle, l'ellipse, sont des courbes fermées simples.



1.3 Exemple 3 : La cycloïde

Considérons un point P sur la circonférence d'un disque C. En faisant rouler ce disque sur une droite horizontale, le point P se déplace. Quel est le lieu de P ? Représenter cette trajectoire.



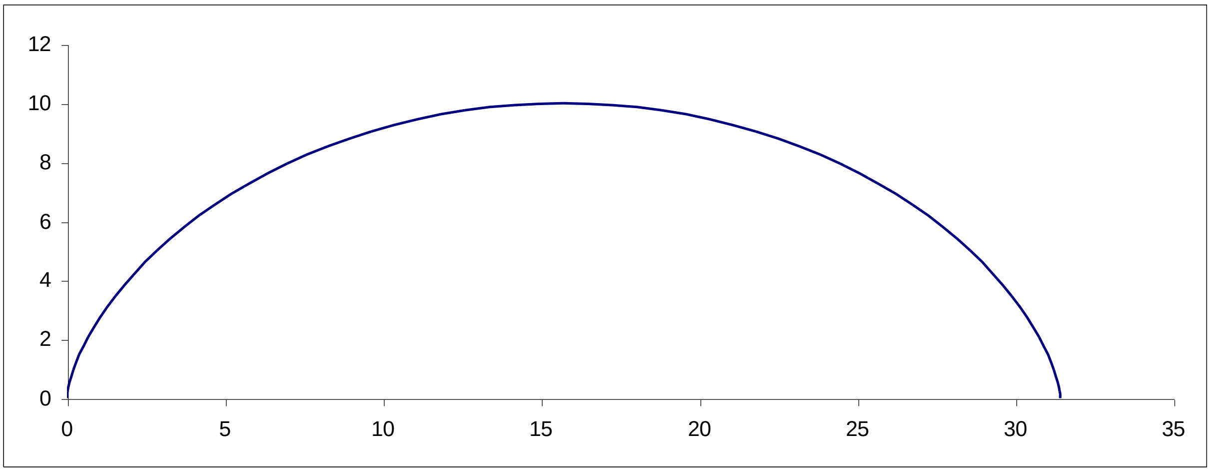
Choix du repère :
Soit P_0, la position initiale du point P : l'origine du repère.
OX est la droite sur laquelle roule le disque.
OY perpendiculaire à OX
On constate que l'on va avoir une fonction périodique de période 2π : nous considèrerons donc $\varphi \in [0, 2\pi]$

Nous observons : l'arc de cercle QP = $|P_0Q$
or $x = |P_0Q| - |SQ| =$ Arc QP $- |RC| = r\varphi - r\cos(\varphi - \pi/2)$ (propriété du triangle RCP)
$\Rightarrow x = r\varphi - r\sin\varphi = r(\varphi - \sin\varphi)$
De même $y = |SP| = |SR| + |RP| = r + r\sin(\varphi - \pi/2)$ (dans le triangle RCP)
$\Rightarrow y = r - r\cos\varphi = r(1 - \cos\varphi)$

Les équations paramétriques de la cycloïde sont donc : $\begin{cases} x = r(\varphi - \sin\varphi) \\ y = r(1 - \cos\varphi) \end{cases}$

Si on choisit r = 5 alors $\begin{cases} x = 5(\varphi - \sin\varphi) \\ y = 5(1 - \cos\varphi) \end{cases}$

φ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
x	0	0.39	2.8	8.2	15.7	23.17	28.5	31	31.45
y	0	1.46	5	8.5	10	8.5	5	1.46	0



1.4 Exercices

Déterminer les équations paramétriques des courbes suivantes :

1. La droite comprenant les points (x_1, y_1) et (x_2, y_2) solution : $\begin{cases} x = x_1 + k(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + k(y_2 - y_1) \end{cases}$

2. la droite comprenant le point (x_1, y_1) et de coefficient angulaire m solution : $\begin{cases} x = x_1 + k \\ y = y_1 + km \end{cases}$

3. le cercle de centre $C(c_1, c_2)$ et de rayon r solution : $\begin{cases} x = c_1 + r\cos\varphi \\ y = c_2 + r\sin\varphi \end{cases}$

4. la parabole $P \equiv y^2 = 2px$ solution : $\begin{cases} x = 2p\cot^2\varphi \\ y = 2p\cot\varphi \end{cases}$

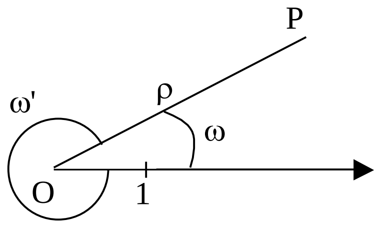
5. L'ellipse $E \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ solution : $\begin{cases} x = a\cos\varphi \\ y = b\sin\varphi \end{cases}$

6. L'hyperbole $H \equiv \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ solution : $\begin{cases} x = a\sec\varphi \\ y = b\tan\varphi \end{cases}$

2. Coordonnées polaires

2.1 Définition

Les coordonnées cartésiennes d'un point sont celles que nous connaissons le mieux. Elles permettent de déterminer un point dans un système d'axes (parfois le repère est orthonormé).
Les coordonnées polaires constituent une autre manière de repérer un point.



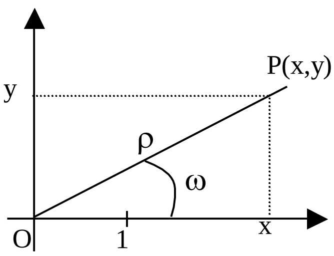
On choisit une origine 0 (appelée pôle) et un axe polaire.
Si un point P a pour coordonnées polaires (ρ, ω)
$\Rightarrow \rho = |OP|$ et ω est l'angle formé par OP et l'axe polaire.

Remarques

1. Contrairement aux coordonnées cartésiennes, les coordonnées polaires ne sont pas uniques :
   $P(\rho, \omega) = P(\rho, \omega')$ avec la relation entre ω et ω' : $\omega' = \omega + k\, 2\pi$
2. $\rho > 0$ car ρ est une distance
3. L'équation polaire d'une courbe est une équation qui lie ρ et ω : $f(\rho, \omega) = 0$ ou $\rho = g(\omega)$

2.2 Liens entre coordonnées polaires et coordonnées cartésiennes.

a) Comment exprimer les coordonnées cartésiennes en fonction des coordonnées polaires ?



Soit P(ρ, ω) en coordonnées polaires.
Choisissons OX = l'axe polaire et Oy ⊥ Ox et ∋ O
Nous avons directement :

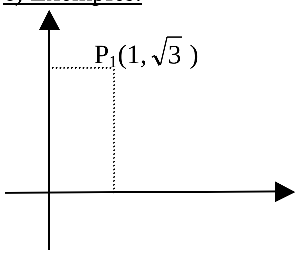
$$\Rightarrow \begin{cases} x = \rho\cos\omega \\ y = \rho\sin\omega \end{cases}$$

b) Comment exprimer les coordonnées polaires en fonction des coordonnées cartésiennes ?

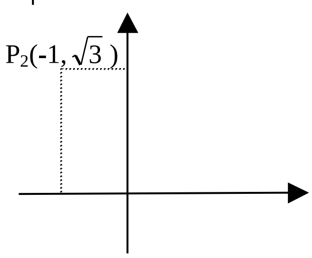
Par Pythagore : $\rho^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ (car $\rho > 0$ car c'est une distance)

Et par la trigonométrie : $\tan\omega = \frac{y}{x} \Rightarrow w = \arctan\frac{y}{x}$ ou $\omega = \arctan\frac{y}{x} + \pi$ selon la position de P

c) Exemples.



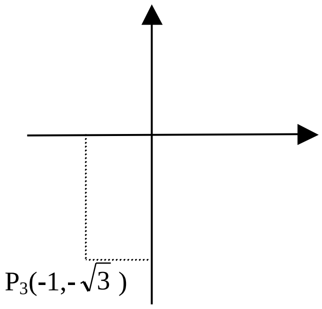
$P_1(1, \sqrt{3})$ en coordonnées cartésiennes $\Rightarrow \rho = \sqrt{1+3} = 2$ et $\omega = \arctan\sqrt{3} = \frac{\pi}{3} \Rightarrow P(2, \frac{\pi}{3})$ en coordonnées polaires.



$P_2(-1, \sqrt{3})$ en coordonnées cartésiennes $\Rightarrow \rho = \sqrt{1+3} = 2$ et $\arctan -\sqrt{3} = -\frac{\pi}{3}$

Or $-\frac{\pi}{3} \notin 2^{\text{ème}}$ quadrant $\Rightarrow \omega = -\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{2\pi}{3}$

$\Rightarrow P(2, \frac{2\pi}{3})$ en coordonnées polaires.



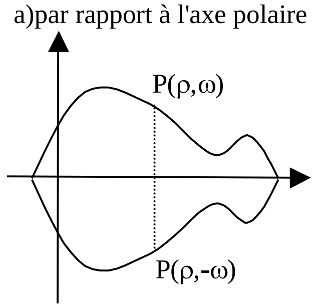
$P_3(-1, -\sqrt{3})$ en coordonnées cartésiennes $\Rightarrow \rho = \sqrt{1+3} = 2$ et arctan $\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$

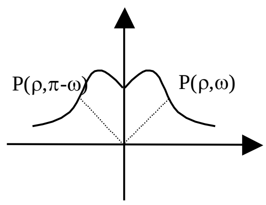
Or $\frac{\pi}{3} \notin 3^{\text{ème}}$ quadrant $\Rightarrow \omega = \frac{\pi}{3} + \pi = \frac{4\pi}{3}$

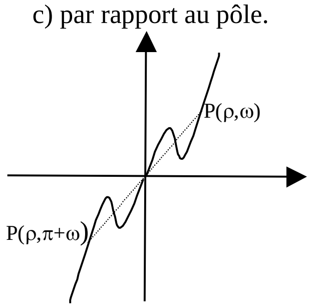
$\Rightarrow P(2, \frac{4\pi}{3})$ en coordonnées polaires.

2.3 Symétries de courbes en coordonnées polaires.

Soit une courbe décrite en coordonnées polaires par $\rho = f(\omega)$
Considérons les différentes symétries :

<table>
<tr><td>a)par rapport à l'axe polaire</td><td>b) par rapport à la droite ∋ le pôle et ⊥ à l'axe polaire.</td><td>c) par rapport au pôle.</td></tr>
<tr><td>

$\Rightarrow f(-\omega) = f(\omega)$</td><td>

$\Rightarrow f(\pi - \omega) = f(\omega)$</td><td>

$\Rightarrow f(\pi + \omega) = f(\omega)$</td></tr>
</table>

2.4 Applications.

I Déterminer les équations en coordonnées polaires des courbes suivantes :

a) le cercle de centre (0, 0) et ce rayon r solution : $\rho = r$ et $\omega \in [0, 2\pi]$

b) d ∋ (0, 0)

sol.: $\rho \in R^+$ et $\omega = a$ (constante) si P "au-dessus" de l'axe polaire et $\omega = a + \pi$ si P "en-dessous" de l'axe polaire

II. Tracer les courbes suivantes (décrites par leurs équations polaires)

$\rho = 2(1 + \cos\omega)$ La cardioïde

$\rho = 4 \sin\omega$

$\rho = \frac{3}{2 - \cos\omega}$

$\rho = a \cos\omega \cos 2\omega$ Trifolium de Descartes

$\rho = |\sin 2\omega|$ Rosace

$\rho = \frac{a}{\cos\omega}$ Spirale hyperbolique

$\rho = \frac{a}{\sqrt{\omega}}$ Spirale parabolique

$\rho = a^{\omega}$ Spirale logarithmique

$\rho = \frac{a}{|\sin 2\omega|}$

$\rho = a(1 + \cos\omega)$

$\rho = \frac{a}{\cos\omega}$

$\rho = a^{\omega}$

$\rho = 2|\tan\omega|$