XIV. Analyse combinatoire Binôme de Newton

1. Introduction.

But : dénombrer des ensembles finis dans des cas élémentaires.

Quelques situations de dénombrement :
1. De combien de manières peut-on remplir un bulletin de tiercé si 19 chevaux sont au départ ?
2. De combien de façons peut-on placer les 12 élèves d'une classe si celle-ci comporte 12 places ?
3. Parmi les 20 coureurs d'un club cycliste, de combien de façons, les dirigeants peuvent-ils constituer une équipe de 5 coureurs ?

2. Arrangements simples et avec répétitions.

Exemple A l'aide des chiffres de 1 à 4 combien de nombres de 3 chiffres différents peut-on former ?
Enumérons les possibilités.

123	124	132	134	142	143
213	214	231	234	241	243
312	314	321	324	341	342
412	413	421	423	431	432

Nous obtenons 24 possibilités.
Observation : pour énumérer tous ces nombres, nous avons respecté un certain ordre : choix du premier chiffre, suivi du choix du second et enfin du troisième.

2.1 Arrangements simples : définition.

On appelle arrangement simple de m éléments pris p à p ($p \leq m$) tous les groupes de p éléments choisis parmi les m éléments donnés et placés dans un ordre donné.
N.B. 2 arrangements simples sont différents dès que l'un contient un élément que l'autre ne contient pas ou s'ils contiennent les mêmes éléments placés dans un ordre différent.

Notation : A_m^p désigne le nombre d'arrangements de m éléments pris p à p.

2.2 Calcul de A_m^p

Soient m éléments a, b, c ...pris p à p.
On peut décomposer cette opération en p étapes , (choix des éléments successifs).
La première étape (choix du premier élément), peut se réaliser de m façons
La seconde étape (choix du second élément), peut se réaliser de $(m - 1)$ façons .
Et ainsi de suite jusque l'étape p qui peut se réaliser de $(m - p + 1)$ façons.
A chaque premier élément choisi, on peut associer tous les seconds éléments possibles lors du second choix et ainsi de suite pour les suivants. Nous sommes dans une situation de type multiplicatif.

Nous avons ainsi: $A_m^p = m \,.\, (m - 1) \,.\, \ldots\ldots(m - p + 1)$

$$\boxed{A_m^p = m\,(m - 1) \ldots (m - p + 2)\,.\,(m - p + 1) = \frac{m!}{(m-p)!}}$$

où m! se lit factorielle m et vaut m (m - 1) ....2 . 1 avec la convention 0! = 1

2.3 Arrangements avec répétitions

On parlera d'arrangement avec répétitions lorsqu'on accepte de prendre plusieurs fois le même élément. Le nombre de ces arrangements est noté $\overline{A}_m^p$. Et nous voyons directement :

$$\boxed{\overline{A}_m^p = m^p}$$

Applications

- Combien de nombres de 3 chiffres distincts peut-on former avec les chiffres de 1 à 4 ? Sol : $A_4^3 = 24$
- Même question en acceptant de prendre plusieurs fois le même chiffre. Sol : $\overline{A}_4^3 = 4^3 = 64$
- La première situation de dénombrement proposée en introduction (le tiercé) Sol : $A_{19}^3 = 5814$
- Combien de mots (lisibles ou non) de 5 lettres distinctes peut-on former avec les lettres de l'alphabet ?
  sol : $A_{26}^5 = 7\,893\,600$
- Combien y a-t-il de ces mots si on peut utiliser plusieurs fois la même lettre ? Sol : $\overline{A}_{26}^5 = 11\,881\,376$

3. Permutations simples et avec répétitions.

3.1 Permutations simples.

Définition : Etant donné un groupe de m éléments distincts, on appelle permutation de ces m éléments, tout groupe de ces éléments placés dans un ordre déterminé .
Notation : P_m désigne le nombre de ces permutations.
Calcul : nous remarquons $P_m = A_m^m = m\,(m - 1) \ldots (m - m + 1) = m\,(m - 1) \ldots 1 = m\,!$

$$\boxed{P_m = m!}$$

3.2 Permutations avec répétitions

Définition : on appelle permutation avec répétitions de m éléments parmi lesquels 1 élément se répète r_1 fois, un autre r_2 fois......r_n fois, tout groupe de ces m éléments placés dans un ordre déterminé.

Notation : $\overline{P}_m^{r_1, r_2, \ldots r_n}$ est le nombre de ces permutations. avec $r_1 + r_2 + \ldots r_n = m$
Lorsque tous les éléments sont distincts, il y en a m ! Comme le 1er élément se répète r_1 fois, on devra diviser ce nombre par le nombre de permutations de r_1 éléments distincts. De même, le second élément se répète r_2 fois. On devra diviser le résultat par le nombre de permutations de r_2 éléments distincts.
Et nous obtenons ainsi :

$$\boxed{\overline{P}_m^{r_1, r_2, \ldots r_n} = \frac{m!}{r_1\,!\,r_2\,!\ldots r_n\,!}}$$

Applications

- La 2ème situation de dénombrement d'introduction (placement des 12 élèves d'une classe)
  Sol : $P_{12} = 12\,! = 479\,001\,600$
- De combien de façons peut-on placer un groupe de 5 personnes sur un banc ? Sol : $P_5 = 5.4.3.2 = 120$
- Pour donner une friandise à chaque enfant d'un groupe de 10, on dispose de 3 Léo, 2 bounty et 5 chacha. De combien de façons peut-on effectuer la distribution ? Sol : $\overline{P}_{10}^{3,2,5} = \dfrac{10!}{3!2!5!} = 2520$

4. Combinaisons simples et avec répétitions.

Exemple :
Une classe doit élire 2 délégués parmi eux (15 élèves). De combien de façons peuvent-ils le faire ?

4.1 Combinaisons simples : définition.

On appelle combinaison simple de m éléments pris p à p ($p \leq m$) tous les groupes de p éléments choisis parmi les m donnés.

Notation : C_m^p désigne le nombre de combinaisons de m éléments pris p à p.

Dans notre exemple : C_{15}^2

4.2 Calcul de C_m^p

Etant donné une combinaison, on peut placer ses éléments de P_p façons, et ceci pour chacune d'elles.

$$\Rightarrow A_m^p = P_p\, C_m^p \Rightarrow C_m^p = \frac{A_m^p}{P_p}$$

$$\boxed{C_m^p = \frac{m!}{p!(m-p)!}}$$

Applications

- Dans le cas de la 4[ème] situation de dénombrement d'introduction (sélection de 5 coureurs dans un club de 20 cyclistes) Sol : $C_{20}^5 = 15\,504$
- A la fin d'un repas rassemblant 15 amis, 3 sont chargés de la vaisselle. Combien de groupes différents peut-on former afin d'exécuter cette tâche ? Sol : $C_{15}^3 = 2\,730$

4.3 Combinaisons avec répétitions.

Exemple : Une urne contient des boules de 5 couleurs différentes et contient au moins 4 boules de chaque couleur. On tire 4 boules de cette urne. Combien de possibilités de groupements a-t-on ?
Définition. On appelle combinaison avec répétition de m éléments pris p à p tout groupe de p éléments choisis parmi les m donnés. (sans s'occuper de l'ordre), chaque élément pouvant figurer plusieurs fois dans un même groupe.

Notation : $\overline{C}_m^p$ désigne le nombre de combinaisons avec répétitions de m éléments pris p à p

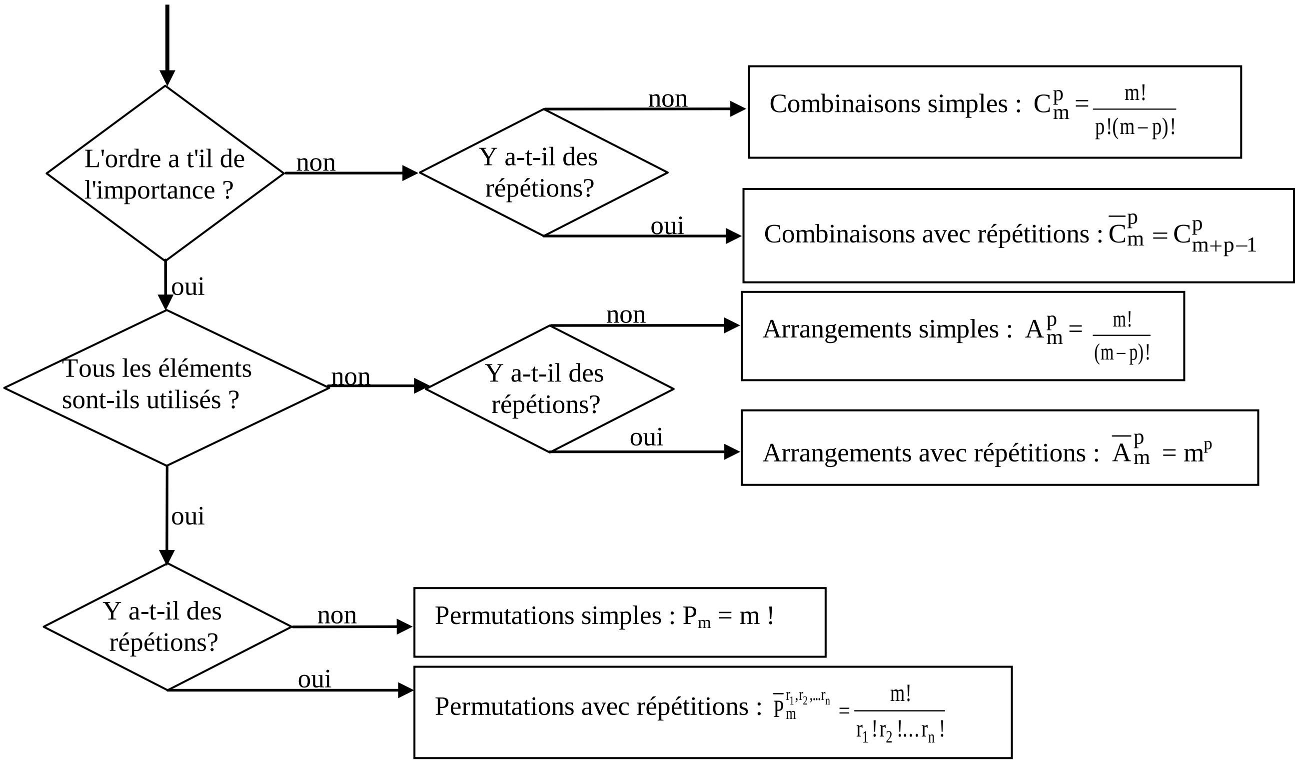
Calcul On peut voir $\overline{C}_m^p = \dfrac{(m+p-1)(m+p-2)\ldots m}{p!}$ c.-à-d.

$$\boxed{\overline{C}_m^p = C_{m+p-1}^p}$$

Résolution de l'exemple : $\overline{C}_5^4 = C_{5+4-1}^4 = C_8^4 = \dfrac{8!}{4!(8-4)!} = 70$

5. Synthèse

Quelles questions se poser lors de la résolution d'un problème d'application directe en analyse combinatoire ?



Ultérieurement, nous rencontrerons des situations plus générales qui ne peuvent être résolues uniquement par le questionnement de ce tableau.

6. Exercices - série A : applications de base.

1. Combien de nombres de 5 chiffres peut-on former à l'aide des chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6.
   a) si tous les chiffres sont distincts ? sol : 720
   b) Si un chiffre peut se répéter plusieurs fois ? sol : 7776
2. Combien de mots de 6 lettres lisibles, ou non, peut-on écrire à l'aide des 26 lettres de l'alphabet ? sol : 308 915 776
3. Combien y a-t-il de nombres formés de 4 chiffres impairs distincts ? sol : 120
4. De combien de façons 4 personnes peuvent-elles s'asseoir si elles disposent de 6 chaises ? sol : 360
5. Une personne désire offrir à chacun de ses 3 amis un disque à choisir parmi 5 disques qu'elle possède. De combien de manières peut-elle procéder ? sol : 60
6. 7 joueurs de tennis se rencontrent. Ils désirent disputer des matches de simple. De combien de manières cela est-il possible ? sol : 21
7. Combien peut-on former de sous-ensembles de 7 éléments dans un ensemble de 15 éléments ? sol : 6435
8. De combien de manières peut-on élire un président, un secrétaire et un trésorier dans une société de 10 membres ? sol : 720
9. Combien peut-on former d'anagrammes du mot chien ? (Ayant une signification ou non) sol : 120
   Même question pour le mot personnelle. sol : 1 663 200
10. Dans un tiercé, on a 17 chevaux au départ. Quelqu'un joue et désire placer le cheval n° 7 en tête. Combien de possibilités lui reste-t-il pour choisir les 2 autres chevaux ? sol : 240
11. Dans un peloton de 20 soldats, de combien de façons peut-on désigner une corvée de 6 hommes ? sol : 38 760
12. De combien de façons peut-on désigner cette corvée si un soldat y est inclus d'office et un autre en est exclu d'office ? sol : 8 568
13. Combien de nombres de 5 chiffres peut-on former avec les chiffres 3 et 5 ? sol : 32
14. Combien de droites peut-on mener en joignant 2 à 2, 11 points dont 3 ne sont jamais alignés ? sol : 55
15. De combien de manières peut - on choisir les sommets d'un triangle parmi les sommets d'un décagone régulier ? sol : 120
16. Combien de pièces comporte un jeu de dominos ? (Sur chaque pièce, on trouve 2 chiffres allant de 0 à 6 et chaque disposition ne se présente qu'une fois.) sol : 28
17. A l'aide de 5 fanions de teintes différentes on réalise des signaux en plaçant 3 d'entre eux sur une même hampe. Combien de signaux distincts peut-on réaliser ? sol : 60
18. La serrure d'un coffre-fort se compose de 3 anneaux portant chacun toutes les lettres de l'alphabet. De combien de manières peut-on tenter un essai pour ouvrir le coffre-fort ? sol : 17 576
19. De combien de manières peut-on colorier une carte représentant 3 pays à l'aide de 3 couleurs différentes prises parmi 7 couleurs données ? sol : 210
20. Combien peut-on obtenir de nombres différents, produits de 5 facteurs premiers choisis parmi les nombres suivants 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, et 19 a) si les 5 facteurs sont distincts ? b) si on peut prendre plusieurs fois le même facteur. sol : a)56 b) 792
21. Un club de football comprend 18 joueurs. De combien de manières peut-on former une équipe de 11 joueurs, chacun ayant une fonction bien déterminée ? sol : 1 270 312 243 200
22. Une assemblée de 450 personnes doit élire un comité de 5 membres parmi 12 candidats. Chacun des 450 participants au scrutin doit voter pour 5 candidats en indiquant l'ordre de ses préférences. De combien de manières chaque participant peut-il remplir valablement son bulletin de vote ? sol : 95 040
23. Les divers résultats possibles d'un match sont indiqués sur une feuille de pronostics par 0, 1, X. De combien de manières différentes peut-on remplir un bulletin de pronostics portant sur 10 matches ? sol : 59 049

24. De combien de manières peut-on constituer une équipe de football (11 équipiers) en choisissant les joueurs parmi les 20 élèves d'une classe sachant que 5 de ces élèves ne peuvent pas être choisis et que six autres doivent faire partie de l'équipe ? sol : 126

25. De combien de manières peut-on extraire 8 des 13 cartes de carreau si on veut que parmi ces cartes figurent l'as et le roi ? sol : 462

7. Mise au point : additionner ou multiplier ?

Au début de ce chapitre, nous avons déjà mis en évidence des situations de type multiplicatif (par exemple lors du calcul des $\overline{A}_m^p$)
Dans les cas de problèmes de dénombrement, nous serons également souvent amenés à additionner les résultats.
Les deux exemples ci-dessous permettent de comparer et distinguer ces situations.
Exemples :

1. Une maîtresse de maison a 9 amis et souhaite en inviter 5 à dîner. Combien de possibilités a-t-elle si deux d'entre eux sont mariés et ne peuvent venir qu'ensemble ?
2. De combien de manières peut-on former un jury de 3 hommes et de 2 femmes en les choisissant parmi 7 hommes et 5 femmes ?

Solutions :

1. Deux catégories distinctes d'invitations apparaissent : ou bien le couple est invité ou il ne l'est pas, c. à d. que l'on est alors amené à choisir 3 invités parmi les 9 amis moins le couple donc parmi 7 ou à en choisir 5 parmi 7 $\Rightarrow$ un total de $C_7^3 + C_7^5$ possibilités. Il s'agit ici d'une situation de type additif.
2. Le problème revient à choisir un groupe de 3 hommes et un groupe de 2 femmes. Pour chacun de ces choix, il y a respectivement C_7^3 et C_5^2 possibilités. De plus, à chaque groupe de 3 hommes, on peut associer n'importe quel groupe de 2 femmes. Il y a donc $C_7^3 \,.\, C_5^2$ possibilités : il s'agit ici d'une situation de type multiplicatif.

Synthèse :

Soit une opération qui peut se réaliser de N façons.
Situation additive : Si ces N façons peuvent se séparer en k catégories disjointes deux à deux et que chacune des catégories peut se réaliser de n_1, n_2 …n_k façons $\Rightarrow$: $N = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$
En pratique : on décrit alors les catégories en les reliant par des "ou" (ex. : on invite le couple "ou" on ne l'invite pas.)
Situation multiplicative : Si cette opération se décompose en k étapes successives, chacune des étapes pouvant se réaliser respectivement de n_1, n_2, ….n_k façons, $\Rightarrow N = n_1 \,.\, n_2 \ldots n_k$
En pratique : On décrit alors la situation par une phrase du type :"à chaque groupe" (d'hommes) "on peut associer n'importe quel groupe" (de femmes)….(selon les cas)

8. Exercices - série B : applications générales.

1. On désire former une équipe de 5 joueurs en prenant 3 joueurs parmi les 15 élèves d'une classe et 2 joueurs parmi les 12 élèves d'une autre classe. De combien de façons peut-on former l'équipe ? sol : 30 030
2. Sachant qu'une plaque de voiture est formée d'un groupe de 3 lettres suivi d'un groupe de 3 chiffres et qu'on n'utilise pas les lettres O et I, déterminer le nombre de plaques qu'on peut former. sol : 13 824 000
3. Combien de voitures pourront être immatriculées avec des plaques comportant 5 caractères qui peuvent être soit un chiffre soit une lettre autre que O ou I ? sol : 45 435 424
4. Combien de voitures pourront être immatriculées avec des plaques comportant 2 lettres (autres que O et I) et 3 chiffres sans répétition. sol : 3 974 400
5. Même question, mais les lettres et les chiffres peuvent se répéter. sol : 5 760 000
6. De combien de manières peut-on distribuer 12 cartes différentes entre 4 joueurs quand on en donne 3 à chacun ? sol : 369 600
7. Combien y a-t-il de nombres naturels inférieurs à 20000 où aucun chiffre ne se répète ? sol : 8299

8. L'alphabet morse est composé de groupements de signes - et • . Combien de signes au moins faut-il grouper si on veut pouvoir représenter 50 symboles ? sol : 5 (on peut alors former 62 symboles)

9. Dans une classe de 31 élèves comportant 12 internes, de combien de façons peut-on former un comité de 7 élèves dont un président qui doit nécessairement être un interne ? sol : 7 125 300

10. Combien y a-t-il de nombres impairs formés de 4 chiffres différents ? sol : 2 240

11. Même question si les chiffres peuvent se répéter. sol : 4 500

12. Combien de nombres de 4 chiffres peut-on former en base 10 ? En base b ? sol : 9 000, $b^4 - b^3$

13. Dans un jeu de 32 cartes, de combien de façons peut-on choisir 6 cartes comptant parmi elles un roi et 1 pique et pas d'autre pique ni d'autre roi ? sol : 146 034

14. Combien de montants différents peut-on payer en employant 1 ou plusieurs pièces d'une bourse contenant 1 pièce de chacune des valeurs suivantes : 0.5 F 1 F 5 F 10 F 20 F sol : 31

15. a) De combien de manières différentes une société de 12 membres peut-elle choisir un groupe de 3 membres pour effectuer un voyage ? sol : 220
b) même question, mais madame Martin refuse de partir avec monsieur Claude ? sol : 210
c) Même question mais les jumeaux Dupont n'acceptent de participer au voyage que s'ils sont ensemble. sol : 130

16. Combien de mots (lisibles ou non) de 4 lettres contenant au moins une voyelle peut-on former avec les lettres de l'alphabet (N.B. : 6 voyelles et 20 consonnes) sol : 296 976

17. En supposant qu'il n'y a pas de répétitions, à l'aide des 6 chiffres 2, 3, 5, 6, 7 et 9
a) combien de nombres de 3 chiffres distincts peut-on former ? sol : 120
b) combien de ces nombres sont pairs ? sol : 40
c) combien de ces nombres sont impairs ? sol : 80
d) combien de ces nombres contiennent 3 mais pas 2 ? sol : 36
e) Combien de ces nombres contiennent 6 et 5 mais pas 2 ? sol :18

18. Dans un jeu de 32 cartes, combien y a-t-il de façons de choisir 3 cartes qui soient
a) des as ? sol : 4
b) de même valeur (3 as ou 3 rois ou …) ? sol : 32
c) des cœurs toutes les trois ? sol : 56

19. a) Combien y a-t-il de nombres de 5 chiffres dont 3 sont des chiffres pairs différents ($\neq 0$) et les 2 autres sont des chiffres impairs distincts. sol : 4800
b) Même question si on accepte les répétitions. sol : 16 000

20. Avec les chiffres de 1 à 7, on forme des nombres de 5 chiffres différents.
Combien a) contiennent exactement 2 chiffres impairs ? sol : 720
b) contiennent au moins 2 chiffres impairs ? sol : 2 520
c) contiennent 3 et 6 ? sol : 1 200
d) sont multiples de 2 ? sol : 1 080

21. a) Avec 10 lettres différentes, combien peut-on former de mots de 6 lettres distinctes si chaque mot doit contenir 3 lettres déterminées parmi les 10 ? sol : 25 200
b) Parmi ces mots, combien y en a-t-il où les 3 lettres se suivent toujours dans le même ordre ? sol : 840
c) Et combien si les 3 lettres doivent se suivre dans un ordre quelconque ? sol : 5 040

9. Propriétés des combinaisons. Tableau de Pascal (1623-1662)

1. $C_m^0 = 1$
2. $C_m^1 = m$
3. $C_m^m = 1$
4. si $p > m \Rightarrow C_m^p = 0$

5. $C_m^p = C_m^{m-p}$

En effet : $C_m^p = \dfrac{m!}{p!(m-p)!}$ et $C_m^{m-p} = \dfrac{m!}{(m-p)!(m-(m-p))!} = \dfrac{m!}{(m-p)!\,p!}$

et nous avons bien $C_m^p = C_m^{m-p}$

6. $C_{m+1}^{p+1} = C_m^p + C_m^{p+1}$

$$C_m^p + C_m^{p+1} = \frac{m!}{p!(m-p)!} + \frac{m!}{(m-p-1)!(p+1)!} = \frac{m!(p+1)}{(p+1)!(m-p)!} + \frac{m!(m-p)}{(m-p)!(p+1)!} = \frac{m!(p+1)+m!(m-p)}{(p+1)!(m-p)!}$$

$$= \frac{m!(p+1+m-p)}{(p+1)!(m-p)!} = \frac{m!(m+1)}{(p+1)!(m-p)!} = \frac{(m+1)!}{(p+1)!(m+1-(p+1))!} = C_{m+1}^{p+1}$$

Grâce à cette dernière propriété, nous allons pouvoir obtenir le tableau de Pascal donnant les valeurs des combinaisons de p éléments choisis parmi m.

m\p	0	1	2	3	...
0	C_0^0	C_0^1	C_0^2	C_0^3	
1	C_1^0	C_1^1	C_1^2	C_1^3	
2	C_2^0	C_2^1	C_2^2	C_2^3	
3	C_3^0	C_3^1	C_3^2	C_3^3	
...					

En prenant 3 éléments quelconques de ce tableau disposés comme suit:

x	y
	z

$x = C_m^p$ $\quad$ $y = C_m^{p+1}$ $\quad$ $z = C_{m+1}^{p+1}$

z = x + y par la propriété $C_{m+1}^{p+1} = C_m^p + C_m^{p+1}$

En utilisant toutes les propriétés des combinaisons, nous obtenons facilement les premières valeurs du tableau de Pascal (mathématicien du 17$^{\text{ème}}$ siècle) :

m\p	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0
3	1	3	3	1	0	0	0	0	0	0	0
4	1	4	6	4	1	0	0	0	0	0	0
5	1	5	10	10	5	1	0	0	0	0	0
6	1	6	15	20	15	6	1	0	0	0	0
7	1	7	21	35	35	21	7	1	0	0	0
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	0	0
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	0
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

10. Binôme de Newton.

10.1 Rappel :

$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2 y + 3xy^2 + y^3$
Nous allons généraliser ces développements à $(x + y)^n$

10.2 Formule du binôme.

Newton (mathématicien anglais 1642/1727) établit la formule suivante :

$$\boxed{(x + y)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i x^{n-i} y^i}$$

Démontrons cette formule par récurrence.

1. Si n = 1, la proposition est vraie.
   En effet : $(x + y)^1 = x + y = C_1^0 x + C_1^1 y$
2. Si la proposition est vraie pour n = k, alors elle est vraie pour n = k + 1
   En effet : $(x + y)^{k+1} = (x + y)^k (x + y)$
   $= (C_k^0 x^k + C_k^1 x^{k-1} y + C_k^2 x^{k-2} y^2 + \dots\dots + C_k^i x^{k-i} y^i \dots + C_k^{k-1} x\, y^{k-1} + C_k^k\, y^k) (x + y)$
   En appliquant la propriété de distributivité, nous obtenons :
   $= C_k^0 x^{k+1} + C_k^1 x^k y + C_k^2 x^{k-1} y^2 + \dots\dots + C_k^i x^{k-i+1} y^i \dots + C_k^{k-1} x^2 y^{k-1} + C_k^k\, x\, y^k$
   $+ C_k^0 x^k y + C_k^1 x^{k-1} y^2 + C_k^2 x^{k-2} y^3 + \dots\dots + C_k^i x^{k-i} y^{i+1} \dots + C_k^{k-1} x\, y^k + C_k^k\, y^{k+1}$
   Et en rassemblant les termes de même puissances :
   $= C_k^0 x^{k+1} + (C_k^0 + C_k^1)x^k y + (C_k^1 + C_k^2) x^{k-1} y^2 \dots + (C_k^{i-1} + C_k^i)x^{k-i+1} y^i \dots + (C_k^{k-1} + C_k^k) x\, y^k + C_k^k\, y^{k+1}$
   En appliquant la 6ème propriété des combinaisons ($C_{m+1}^{p+1} = C_m^p + C_m^{p+1}$), nous avons :
   $= C_k^0 x^{k+1} + C_{k+1}^1 x^k y + C_{k+1}^2 x^{k-1} y^2 \dots + C_{k+1}^i x^{k-i+1} y^i \dots + C_{k+1}^k\, x\, y^k + C_k^k\, y^{k+1}$
   Comme $C_k^0 = C_{k+1}^0 = 1 = C_k^k = C_{k+1}^{k+1}$, nous avons :
   $(x + y)^{k+1} = C_{k+1}^0 x^{k+1} + C_{k+1}^1 x^k y + C_{k+1}^2 x^{k-1} y^2 \dots + C_{k+1}^i x^{k-i+1} y^i \dots + C_{k+1}^k\, x\, y^k + C_{k+1}^{k+1}\, y^{k+1}$
   qui montre bien que la proposition est vérifiée pour n = k + 1

La propriété est bien vérifiée quelle que soit la valeur de n :

10.3 Exercices.

1. Vérifier par le binôme de Newton les formules de $(x + y)^2$ et $(x + y)^3$
2. Calculer a) $(a + b)^7 =$ b) $(3x^2 + y^3)^5 =$ c) $(1 + \sqrt{2}\ )^4 =$ d) $(2x^2 + \frac{3y}{2})^5$
3. Transformer la formule du binôme de Newton pour obtenir la valeur de $(x - y)^n$
   En déduire $(a - y)^8$; $(a - 1)^6$
4. Calculer
   a) $(\sqrt{3} + 5)^4 + (\sqrt{3} - 5)^4$ b) $(\sqrt{3} - 5)^{12} + (\sqrt{3} + 5)^{12}$ c) $(2x + \sqrt{5}\ )^4 - (2x - \sqrt{2}\ )^4$
5. Déterminer le 8ème terme du développement de $(x + y)^{17}$
6. Quel est le coefficient du terme en x^4 de $(3 - 2x)^9$
7. Calculer le terme en x de $(4x^2 - \frac{2}{x})^5$
8. Calculer le(s) terme(s) milieu(x) dans $(3x + 2)^{12}$
9. Montrer que a) $2^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i$ b) $0 = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i C_n^i$
10. Combien de sous-ensembles peut-on former dans un ensemble de n éléments ?
11. Posé aux olympiades 1998 : "Que vaut la somme des valeurs absolues des coefficients du développement de $(x^3 - 3x^2 + 3x - 1)^5$? A) 0 B) 5 C) 15 D) 2^{10} ou E) 2^{15}
12. En observant le tableau de Pascal, on constate :
    a) En additionnant les termes de chaque ligne de ce tableau, on obtient les puissances successives de 2
    b) En écrivant côte à côte les différents termes d'une même ligne de ce tableau, on obtient les puissances successives de 11 (de manière exacte pour les premières valeurs, moyennant certaines petites adaptations ensuite).
    Justifier ces observations.