XVII. Les nombres complexes.

1. Introduction

Progressivement, nous avons agrandi les ensembles de nombres en passant de N à Z puis à Q et enfin à R. Ces agrandissements ont donné la possibilité de résoudre de plus en plus d'équations.
L'équation 2x + 5 = 3 n'a pas de solution dans N mais en a une dans Z : x = -1
L'équation 3x + 5 = 3 n'a pas de solution dans Z mais en a une dans Q : x = $-\frac{2}{3}$
L'équation x^2 - 3 = 0 n'a pas de solution dans Q mais en a deux dans R : x = $\pm\sqrt{3}$
Cependant nous avons rencontré des équations du second degré n'ayant pas de solution dans R
Exemple : l'équation x^2 - 3x + 5 = 0 n'admet pas de solution réelle car son réalisant est négatif : ρ = - 11
Nous allons maintenant imaginer un nombre dont le carré serait égal à -1. Ce nombre n'appartient évidemment pas à l'ensemble des réels puisque le carré de tout nombre réel est positif : c'est un nombre imaginaire.
En supposant que l'on calcule avec i comme s'il s'agissait d'un nombre réel, nous pouvons poursuivre la résolution de l'équation proposée et nous obtenons les solutions : $x_1 = \frac{3}{2} + i\,\frac{\sqrt{11}}{2}$ et $x_2 = \frac{3}{2} - i\,\frac{\sqrt{11}}{2}$
Chacune de ces solutions est appelée nombre complexe.

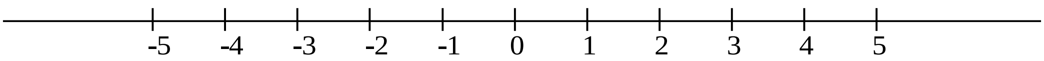
Conclusion : un nombre complexe s'écrit sous la forme a + ib où a et b sont des nombres réels et i un nombre imaginaire dont le carré est - 1
a est la partie réelle et b la partie imaginaire de a + ib
Les nombres complexes dont la partie réelle est nulle sont appelés nombres imaginaires.
Les nombres complexes dont la partie imaginaire est nulle sont des nombres réels.

Les nombres complexes ont de nombreuses applications dans le domaine scientifique, notamment en électricité où les "phaseurs" sont des nombres complexes représentant l'amplitude et le déphasage du courant.

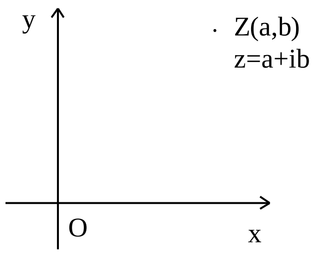
2. Représentation géométrique : le plan de Gauss

2.1 Notion

Lors de la construction des ensembles de nombres, nous avons représenté ces ensembles (N, Z, Q, R) sur une droite graduée. Cette droite s'est ainsi progressivement "remplie".



Nous constatons directement que les nombres complexes a + ib où b ≠ 0 ne trouveront pas place sur une telle droite.
Assez naturellement, à tout nombre complexe z = a + ib, nous allons associer un point Z de coordonnée (a, b)
Ce point Z(a, b) est appelé point-image du nombre complexe z = a + ib
Le nombre complexe z = a + ib est appelé affixe du point Z(a, b)
Le plan muni d'un repère orthonormé où les points sont marqués par des nombres complexes est appelé plan complexe ou plan de Gauss.
Dans ce plan, l'axe Ox est appelé axe réel et l'axe Oy, l'axe imaginaire.



2.2 Exercices

Déterminer l'image, dans le plan complexe, de chacun des nombres complexes suivants :

1. 0
2. 1
3. -3
4. i
5. -2i
6. 1+i
7. 1-i
8. 2-3i

3. Règles de calcul

3.1 Addition de deux nombres complexes

(a + bi) + (a' + b'i) = (a + a') + (b + b')i
Ex : (3 + 5i) + (-6 - 2i) = -3 + 3i

3.2 Produit de deux nombres complexes

(a + bi) . (a' + b'i) = aa' + iab' + ia'b + i^2 bb' = (aa' - bb') + i (ab' + a'b)
Ex : (3 + 5i) . (6 - 2i) = 28 + 24i

3.3 Multiplication d'un nombre complexe par un réel.

r . (a + bi) = ra + rb i

3.4 Puissances de i à exposants naturels.

$i^0 = 1$ $i^1 = i$ $i^2 = -1$ $i^3 = -1 . i = -i$ $i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$
$i^5 = i^4 . i = i$ et à partir de là $i^6 = -1$ $i^7 = -i$ $i^8 = 1$ ....
<u>Généralisation</u> : $i^{4k} = 1$ $i^{4k+1} = i$ $i^{4k+2} = -1$ $i^{4k+3} = -i$

Exemple : $i^{157} = i^{156} . i = \left(i^2\right)^{78} . i = (-1)^{78}\, i = i$

3.5 Quotient de deux nombres complexes

3.5.1 Inverse d'un nombre complexe

<u>Remarquons</u> : (a + bi) . (a - bi) = $a^2 + b^2$
Les nombres complexes a + bi et a - bi ont la même partie réelle et des parties imaginaires opposées. Ces nombres sont appelés <u>*complexes conjugués*</u> ; leur produit est un nombre réel positif
Le complexe conjugué du nombre complexe z est noté $\overline{z}$
Cette propriété est utile pour calculer l'inverse d'un nombre complexe :

<u>*Exemple 1*</u>: $\frac{1}{1+5i} = \frac{1-5i}{(1+5i)(1-5i)} = \frac{1-5i}{1+25} = \frac{1-5i}{26}$

Remarquons que $\frac{1-5i}{26}$ est bien l'inverse de (1+5i) . En effet : $\frac{1-5i}{26}$. (1+5i) = $\frac{1+25}{26}$ = 1

<u>*Exemple 2*</u> : $\frac{1}{i} = \frac{i}{i^2} = -i$

3.5.2 Quotient

<u>*Exemple*</u> : $\frac{2+i}{1-3i} = \frac{(2+i).(1+3i)}{(1-3i).(1+3i)} = \frac{2+6i+i+3i^2}{1+9} = \frac{-1+7i}{10}$

3.6 Exercices

A. Calculer :
1. 2 (3 – i) + 5 (2 + 3i)
2. (4 – 2i) . (3 + 5i)
3. $\frac{1}{1+i}$
4. $\frac{i}{i-1}$
5. $\frac{4-i}{2-i} + \frac{4+i}{2+i}$
6. $\frac{(1+i)^2}{(1-i)^2}$
7. $\frac{1-i}{3+2i} - \frac{3+i}{1-2i}$
8. $\frac{1}{\cos a + i \sin a}$

B. Calculer
1. $\frac{z+1}{z-1}$ pour z = 1 + i et z = 1 - i
2. $\frac{2z+3}{2z-1}$ pour z = i et z = - i

3. $\dfrac{z^2+z+1}{z^2-z+1}$ pour z = 2 - i et z = 2 + i   4. $\dfrac{z^2+z+1}{z^4-1}$ pour z = 2 + 3i

C. Démontrer

a) que la somme des conjugués de deux nombres complexes est égale au conjugué de la somme de ces deux nombres

b) que le produit des conjugués de deux nombres complexes est égal au conjugué du produit de ces deux nombres.

c) En est-il de même pour le quotient ?

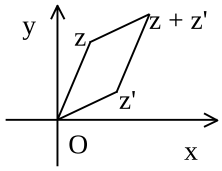
3.7 Interprétation géométrique des opérations sur les nombres complexes – transformations du plan.

3.7.1 L'addition.

<u>Exemple</u> : considérons les nombres complexes $z_1 = 1 - 2i$, $z_2 = -2 + 2i$, $z_3 = 3i$ et $z = 2 + 3i$

Calculons $z_1' = z_1 + z$, $z_2' = z_2 + z$ et $z_3' = z_3 + z$

En plaçant les points Z_1, Z_2, Z_3, Z, Z_1', Z_2', Z_3', affixes des nombres complexes précédents, dans le plan de Gauss et en observant les relations entre ces points, nous pouvons conclure :

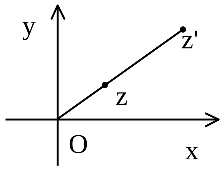


> <u>Dans le plan de Gauss</u> :
> additionner deux nombres complexes revient à appliquer à l'un d'eux une translation de vecteur $\vec{v}$ dont les composantes sont la partie réelle et la partie imaginaire de l'autre.

3.7.2 La multiplication par un réel

<u>Exemple</u> : reprenons l'exemple précédent, et calculons : $z_1'' = 3\, z_1$ et $z''_2 = 3\, z_2$

Après avoir placé les points Z_1'' et Z_2'', affixes de z_1'' et z_2'', nous pouvons conclure :



> <u>Dans le plan de Gauss</u> :
> Multiplier un nombre complexe z par un réel a équivaut à déterminer l'image de ce nombre complexe par une homothétie de centre O et de rapport a

3.7.3 La multiplication

En reprenant les valeurs choisies dans l'exemple précédent, calculons $z_1'' = z_1 \,.\, z$ et $z_2'' = z_2 \,.\, z$ et plaçons les points Z_1'' et Z_2'' dans le plan de Gauss.

Nous constatons qu'il est difficile actuellement de préciser quelle transformation ont subie les points Z_1 et Z_2

Nous reviendrons ultérieurement sur cette interprétation.

4. Equations du second degré.

4.1 Equations binômes.

On appelle équation binôme une équation du type $z^2 = a + ib$ où z est l'inconnue.

4.1.1 Exercice résolu

Soit à résoudre l'équation $z^2 = -8 - 6i$

Soit $z = x + iy$ où x et y sont des réels.

nous avons donc $(x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi = -8 - 6i$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -8 & (1) \\ 2xy = -6 & (2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(x^2 - y^2\right)^2 = 64 \\ 4x^2y^2 = 36 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^4 - 2x^2y^2 + y^4 = 64 \\ 4x^2y^2 = 36 \end{cases}$$

En additionnant membre à membre ces 2 équations, nous obtenons : $x^4 + 2x^2 y^2 + y^4 = 100 \Leftrightarrow \left(x^2 + y^2\right)^2 = 100$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 10$

En reprenant l'équation (1)

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ x^2 - y^2 = -8 \end{cases} \Rightarrow \text{(en additionnant et soustrayant membre à membre ces 2 équations) :} \begin{cases} 2x^2 = 2 \\ 2y^2 = 18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ y^2 = 9 \end{cases}$$

$\Rightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = \pm 3 \end{cases}$ or, par l'équation (2), y = $-\dfrac{3}{x}$ $\Rightarrow$ x = 1 et y = - 3 ou x = -1 et y = 3

Les solutions de l'équation proposée sont donc les nombres complexes $z_1 = 1 - 3i$ et $z_2 = -1 + 3i$

Ce sont les nombres complexes dont le carré vaut - 8 - 6i

4.1.2 Exercices :

Résoudre les équations suivantes :

1. $z^2 + 1 = 0$
2. $z^2 + 9 = 0$
3. $z^2 - 2i = 0$
4. $z^2 = 5 + 12i$
5. $z^2 + 15 - 8i = 0$

Solutions

1) $z = \pm i$ 2) $z = \pm 3i$ 3) $z = \pm (1 + i)$ 4) $z = \pm (3 + 2i)$ 5) $z = \pm (1 + 4i)$

4.2 Equations complètes

4.2.1 Exemple résolu

Résoudre l'équation : $- x^2 + (i - 1) x - (i + 2) = 0$

$\rho = (i - 1)^2 - 4 (i + 2) = - 1 + 1 - 2i - 4i - 8 = - 8 - 6i$

Les résultats du point 4.1.1 permettent d'avoir $- 8 - 6i = (-1 + 3i)^2$ et nous obtenons ainsi les solutions de l'équation proposée : $x_1 = \dfrac{1 - i - 1 + 3i}{-2} = -i$ et $x_2 = \dfrac{1 - i + 1 - 3i}{-2} = -1 + 2i$

4.2.2 Exercices

Résoudre les équations suivantes :

1. $x^2 + x + 1 = 0$
2. $x^2 + 2x + 2 = 0$
3. $x^2 + (3i + 1) x = 0$
4. $x^2 + (2i + 1)x + 2i = 0$
5. $x^2 + (i - 1)x - 2(1 + i) = 0$
6. $x^2 + 3ix - 2 = 0$
7. $2x^2 + (2 + 3i)x + 2i - 1 = 0$
8. $ix^2 - (5i + 2) x + 5(i + 1) = 0$
9. $x^2 - x - (3i + 1) = 0$
10. $2x^2 - 7x + 5 - 5i = 0$
11. $6x^2 - (5i + 7)x + 2i - 4 = 0$
12. $- x^2 + (i - 1) x - (i + 2) = 0$
13. $ix^2 + (2 + i) x - (i - 1) = 0$
14. $(-3 + i)x^2 + (5i - 1) x + 2 = 0$
15. $(2 - 4i)x^2 + (8 - 10i)x + 7 - 6i = 0$

Solutions:

1. $\rho = -3$; $x = \frac{1}{2}(-1 \pm i\sqrt{3})$
2. $\rho = -4$; $-1 \pm i$
3. $x = 0$ ou $x = -1 - 3i$
4. $\rho = -3 - 4i$; $x = - 2i$ ou $x = -1$
5. $\rho = 8 + 6i$; $x = 2$ ou $x = - 1 - i$
6. $\rho = -1$; $x = - i$ ou $x = - 2i$
7. $\rho = 3 - 4i$; $x = - i$ ou $x = - 1 - \frac{i}{2}$
8. $\rho = - 1$; $x = 3 - i$ ou $x = 2 - i$
9. $\rho = 5 + 12i$; $x = 2 + i$ ou $x = - 1 - i$
10. $\rho = 9 + 40i$; $x = 3 + i$ ou $x = \frac{1}{2} - i$
11. $\rho = 120 + 22i$; $x = \frac{3+i}{2}$ ou $x = \frac{i-1}{3}$
12. $\rho = - 8 - 6I$; $x = - i$ ou $x = -1 + 2i$
13. $\rho = - 1$; $x = i$ ou $x = i - 1$
14. $\rho = - 18i$; $x = - 1 + i$ ou $x = \frac{1}{5}(1 + 2i)$
15. $\rho = 4$; $x = \frac{1}{10}(-13 - i)$ ou $x = \frac{1}{2}(- 3 - i)$

5. Forme trigonométrique des nombres complexes.

5.1 Notion

Considérons un nombre complexe non nul : $z = a + ib$ et Z son point-image dans le plan complexe.

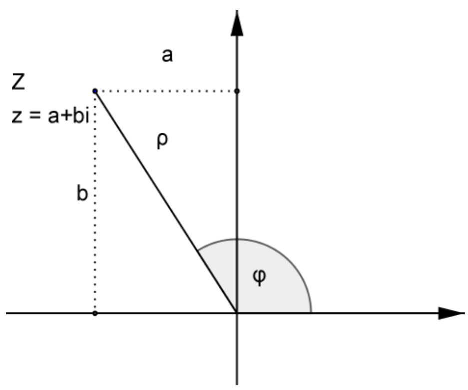
Le point Z est déterminé par sa distance à l'origine : $\rho = \overline{OZ}$ et par l'angle φ formé par les demi-droites [OX et [OZ.

On peut exprimer a et b en fonction de ρ et de φ:

$a = \rho \cos \varphi$ et $b = \rho \sin \varphi$

$\Rightarrow z = \rho (\cos\varphi + i \sin\varphi)$ noté aussi $z = \rho \text{ cis } \varphi$

Cette écriture du nombre complexe z est sa forme trigonométrique.



Il s'agit en quelque sorte d'un changement de coordonnées dans le plan de Gauss : (a , b) est la coordonnée cartésienne du point Z et (ρ , φ) est la coordonnée polaire de ce même point.

Ces deux systèmes de coordonnées sont reliés par les relations : $\begin{cases} a = \rho\cos\varphi \\ b = \rho\sin\varphi \end{cases}$ et $\begin{cases} \rho = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \tan\varphi = \dfrac{b}{a} \end{cases}$

<u>Remarque</u> : $\varphi = \arctan\frac{b}{a}$ ou $\varphi = \pi + \arctan\frac{b}{a}$ selon le quadrant où se situe le point (a, b)

On peut aussi se servir des égalités $\cos\varphi = \frac{a}{\rho}$ et $\sin\varphi = \frac{b}{\rho}$

ρ est appelé <u>*module*</u> de z et est souvent noté |z|. Géométriquement, il est la longueur du segment qui joint l'origine au point Z

L'angle φ est appelé <u>argument</u> de z . φ est l'angle formé par la partie positive de l'axe réel et le segment qui joint l'origine au point Z.

N.B. : le nombre 0 n'a pas d'argument et a 0 comme module.

Les nombres réels positifs ont un argument nul et sont égaux à leur module.

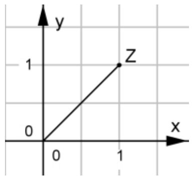
Les nombres réels négatifs ont un argument égal à π et leur module est égal à leur valeur absolue.

Les nombres imaginaires purs (de la forme bi) ont un argument égal à $\frac{\pi}{2}$ lorsque b > 0 et dans ce cas, leur module vaut b. Ils ont un argument égal à $\frac{3\pi}{2}$ lorsque b < 0 et leur module vaut |b|.

<u>Exemple 1 :</u>

Déterminer la forme trigonométrique de 1 + i

Soit Z le point-image de 1 + i.



$\rho = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

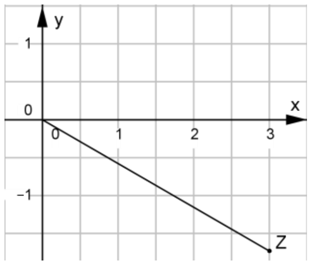
tan φ = 1 et (1, 1) ∈ quadrant 1 ⇒ φ = 45°

⇒ 1 + i = $\sqrt{2}$ (cos 45° + i sin 45°) = $\sqrt{2}$ cis 45°

<u>Exemple 2 :</u>

Déterminer la forme trigonométrique de 3 - $\sqrt{3}$ i

Soit Z le point image de 3 - $\sqrt{3}$ i dans le plan complexe.



$\rho = \sqrt{3^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

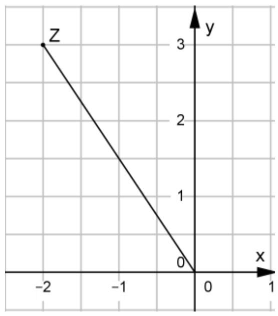
$\tan\varphi = \frac{-\sqrt{3}}{3}$ et (3, - $\sqrt{3}$) ∈ 4ème quadrant ⇒ φ = 330°

⇒ 3 - $\sqrt{3}$ i = 2 $\sqrt{3}$ (cos 330° + i sin 330°) = 2 $\sqrt{3}$ cis 330°

<u>Exemple 3:</u>

Déterminer la forme trigonométrique de 3i - 2

Soit Z le point image de 3i - 2 dans le plan complexe.



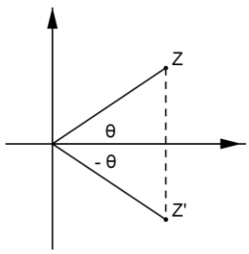
$\rho = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$

$\tan\varphi = -\frac{3}{2}$ et (-2, 3) ∈ quadrant 2 ⇒ φ = 180° - 56,3° = 123,7°

⇒ 3i - 2 ≅ $\sqrt{13}$ (cos 123,7° + i sin 123,7°) = $\sqrt{13}$ cis 123,7 °

5.2 Remarques.

1. Deux nombres complexes conjugués ont le même module et des arguments opposés. Leurs points-images associés sont symétriques par rapport à l'axe réel.
2. Le produit de deux nombres complexes conjugués est le carré de leur module : en effet : (a + ib) . (a - ib) = $a^2 + b^2 = \rho^2$



5.3 Exercices

Déterminer la forme trigonométrique des nombres complexes suivants.

1. 1
2. 3
3. -2
4. i
5. -2i
6. 1-i
7. $i\sqrt{3} + 1$
8. $i\sqrt{3} - 1$
9. $\sqrt{2}\,(i + 1)$
10. - 2 - 3i
11. 2 - 3i

6. Produits, quotients, puissances de nombres complexes écrits sous forme trigonométrique.

6.1 Produits

Considérons deux nombres complexes non nuls écrits sous forme trigonométrique :

$z = \rho\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ et $z' = \rho'\,(\cos\varphi' + i\sin\varphi')$

Calculons leur produit :

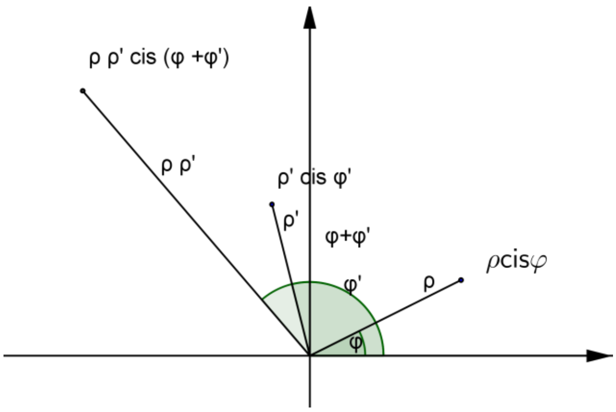
$zz' = \rho\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)\,.\,\rho'\,(\cos\varphi' + i\sin\varphi') = \rho\,\rho'\,[\cos\varphi\cos\varphi' - \sin\varphi\sin\varphi' + i\,(\sin\varphi\cos\varphi' + \sin\varphi'\cos\varphi)]$

et $zz' = \rho\,\rho'\,[\cos(\varphi + \varphi') + i\sin(\varphi + \varphi')] = \rho\,\rho'\,\mathrm{cis}\,(\varphi + \varphi')$

<u>Conclusion</u> :
Le produit de plusieurs nombres complexes non nuls est un nombre complexe dont
- le module est le produit des modules des facteurs
- l'argument est la somme des arguments des facteurs.

<u>*Exemples*</u>

1. $2[\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}]\,.\,\frac{1}{3}[\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}] = \frac{2}{3}[\cos(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3})] = \frac{2}{3}[\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}]$
2. $i.\,[\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}] = [\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}]\,.\,[\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}] = [\cos(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}) + i\sin(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}) = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$



<u>*Interprétation géométrique*</u>

Dans le cas de la somme de 2 nombres complexes et de la multiplication d'un nombre complexe par un réel, nous avions pu précédemment préciser le lien entre ces opérations et les transformations du plan (translation et homothétie). La règle du produit de 2 nombres complexes écrits sous forme trigonométrique nous permet maintenant d'établir un lien semblable.

<u>Dans le plan de Gauss</u> : multiplier un nombre complexe z (de module ρ et d'argument φ) par un autre nombre complexe z' (de module ρ' et d'argument φ'), revient à appliquer au nombre complexe z une rotation d'angle φ' suivie d'une homothétie de centre o et de rapport égal au module de z'.

<u>Cas particuliers</u> :

a) Multiplier le nombre complexe z par i $\Leftrightarrow$ effectuer dans π_0 une rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ de $\overrightarrow{oz}$
b) Multiplier le nombre complexe z par a ($a \in R$) $\Leftrightarrow$ effectuer dans π_0 une homothétie de centre O et de rapport a sur le vecteur $\overrightarrow{oz}$ comme nous l'avions montré précédemment.

6.2 Inverse

$z = \rho\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ et $z' = \rho'\,(\cos\varphi' + i\sin\varphi')$ son inverse.

On a $z\,.\,z' = 1 = \rho\,\rho'\,[\cos(\varphi + \varphi') + i\sin(\varphi + \varphi')]$

Or le module de 1 vaut 1 et son argument vaut 0 $\Rightarrow \rho\,.\,\rho' = 1$ et $\varphi + \varphi' = 0 \Rightarrow$: $\rho' = \dfrac{1}{\rho}$ et $\varphi' = -\varphi$

Conclusion :
l'inverse d'un nombre complexe non nul z est un nombre complexe dont
- le module est l'inverse du module de z
- l'argument est l'opposé de l'argument de z

Cas particulier : cos φ + i sin φ et cos φ - i sin φ sont deux nombres complexes inverses.

$\frac{1}{\cos\varphi + i\sin\varphi}$ = cos φ - i sin φ et $\frac{1}{\cos\varphi - i\sin\varphi}$ = cos φ + i sin φ

6.3 Quotient

A partir de l'égalité : $\frac{z}{z'} = z \,.\, \frac{1}{z'}$ et des points 6.1 et 6.2, nous concluons :

Le quotient de deux nombres complexes non nuls est un nombre complexe dont
- le module est le quotient du module du premier par le module du second
- l'argument est la différence entre l'argument du premier et l'argument du second.

Dans le plan de Gauss : diviser un nombre complexe z (de module ρ et d'argument φ) par un autre nombre complexe z' (de module ρ' et d'argument φ'), revient à appliquer au nombre complexe z une rotation d'angle -φ' suivie d'une homothétie de centre o et de rapport égal à l'inverse du module de z'.

6.4 Puissance à exposant naturel non nul: formule de Moivre.

Considérons un nombre complexe non nul écrit sous forme trigonométrique : z = ρ (cos φ + i sin φ) et $n \in \mathbb{N}^0$
En appliquant la règle du produit au calcul de z^n on obtient :

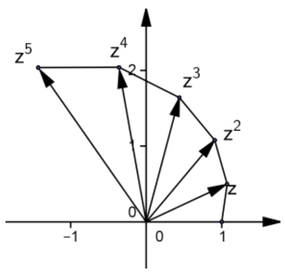
$$z^n = [\rho\,(\text{cis}\,\varphi\,)]^n = \rho^n\,(\text{cis}\,n\varphi)$$

En particulier, si ρ = 1

$$(\text{cis}\,\varphi\,)^n = (\text{cis}\,n\varphi\,)$$

connue sous le nom de formule de Moivre

En se basant sur l'interprétation graphique du produit de 2 nombres complexes, nous trouvons aisément la représentation dans le plan de Gauss des puissances successives d'un nombre complexe.



Extensions de la formule de Moivre:

1. On a aussi :$(\cos\varphi - i\sin\varphi)^n = (\cos n\varphi - i\sin n\varphi)$

   En effet : $(\cos\varphi - i\sin\varphi)^n = \left(\frac{1}{\cos\varphi + i\sin\varphi}\right)^n = \frac{1}{(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n} = \frac{1}{\cos n\varphi + i\sin n\varphi} = \cos n\varphi - i\sin n\varphi$
2. la formule de Moivre est encore valable pour les puissances dont l'exposant est un nombre entier strictement négatif.
   En effet, si n est un nombre entier strictement positif, alors - n est un nombre entier strictement négatif.

   Et : $(\text{cis}\,\varphi\,)^{-n} = \frac{1}{(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n} = \frac{1}{\cos n\varphi + i\sin n\varphi} = \cos n\varphi - i\sin n\varphi = \cos(-n)\varphi + i\sin(-n)\varphi = \text{cis}\,(-n)\varphi$

6.5 Applications.

6.5.1 Application 1

a) Calculer $(1 + \sqrt{3}\,i)^{125}$ Solution : $2^{124}\,(1 - \sqrt{3}\,i)$

b) Déterminer la forme trigonométrique de (1+i) ($\sqrt{3}$ -3i) et de $\dfrac{1+i}{\sqrt{3}-3i}$

Solutions : a) $2\sqrt{6}$ (cis 345°) b) $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$ (cis 105°)

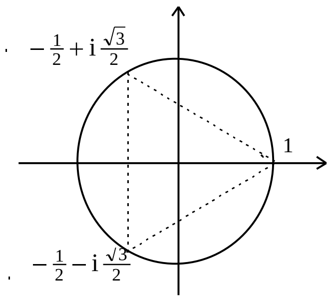
6.5.2 Application 2

En utilisant la formule de Moivre,
a) retrouver les formules exprimant sin 2x et cos 2 x en fonction de sin x et de cos x
b) calculer sin 3x et cos 3x en fonction de sin x et de cos x

6.5.3 Application 3 : résolution d'équations binômes

__a) résoudre l'équation $z^3 = 1$__

Remarquons que dans R, cette équation a une solution unique : 1. Nous allons voir que dans C, cette équation a 3 solutions dont la solution réelle 1



Soit $z = \rho$ cis φ Or 1 = 1 cis 0°
L'équation $z^3 = 1 \Leftrightarrow \rho^3$ cis 3φ = cis 0

$\Rightarrow \rho^3 = 1 \Leftrightarrow \rho = 1$ et $3\varphi = 0 + k2\pi$ ($k \in Z$) $\Leftrightarrow \varphi = k.\dfrac{2\pi}{3}$ ($k \in Z$)

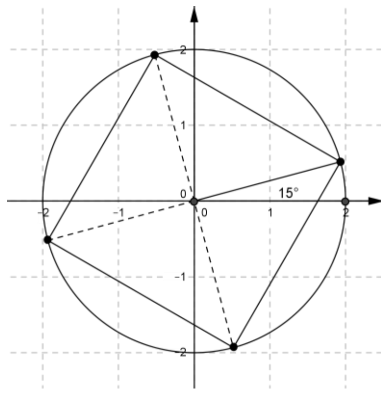
L'équation proposée a donc trois solutions :
si k = 0 : z_1 = cis 0 = 1 et nous retrouvons la solution réelle

si k = 1 : $z_2 = \cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3} = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

si k = 2 : $z_3 = \cos\dfrac{4\pi}{3} + i\sin\dfrac{4\pi}{3} = -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Les solutions ont pour points-images les sommets d'un triangle équilatéral inscrit dans le cercle centré à l'origine et dont le rayon vaut 1; un des sommets de ce triangle est le point-image de 1

__b) résoudre l'équation__ : $z^4 = 8 + 8\sqrt{3}\,i$



Soit $z = \rho$ cis φ or : $8 + 8\sqrt{3} = 16$ cis $\dfrac{\pi}{3}$

L'équation $z^4 = 8 + 8\sqrt{3} \Leftrightarrow \rho^4$ cis $4\varphi = 16$ cis $\dfrac{\pi}{3}$

$\Leftrightarrow [\rho^4 = 16 \Leftrightarrow \rho = 2]$ et $[4\varphi = \dfrac{\pi}{3} + k\,2\pi \Leftrightarrow \varphi = \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi}{2}]$

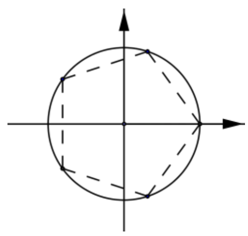
L'équation initiale a donc quatre solutions :

si k = 0 : $z_1 = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{12} + i\sin\dfrac{\pi}{12}\right)$ si k = 1 : $z_2 = 2\left(\cos\dfrac{7\pi}{12} + i\sin\dfrac{7\pi}{12}\right)$

si k = 2 : $z_3 = 2\left(\cos\dfrac{13\pi}{12} + i\sin\dfrac{13\pi}{12}\right)$ si k = 3 : $z_4 = 2\left(\cos\dfrac{19\pi}{12} + i\sin\dfrac{19\pi}{12}\right)$

Les solutions ont pour points-images les sommets d'un carré inscrit dans le cercle centré à l'origine et dont le rayon est 2 comme l'illustre la figure ci-contre.

6.5.4 Généralisation



Un nombre complexe $z = \rho$ cis φ admet n racines $n^{\text{èmes}}$ On montre aisément que celles-ci sont données par $z_k = \sqrt[n]{\rho}$ cis $\dfrac{\varphi + 2k\pi}{n}$ $k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$

Dans le plan de Gauss, ces racines sont les n sommets d'un polygone régulier inscrit dans un cercle de rayon $\sqrt[n]{\rho}$ et de centre O comme l'illustre le graphique ci-contre dans le cas où n = 5 et $\varphi = 0$

<u>Cas particulier</u> : les racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité sont cis $\dfrac{2k\pi}{n}$ et se situent sur un cercle de centre O et de rayon unitaire, la première étant l'unité.
La figure ci-contre illustre le cas des racines cinquièmes de l'unité.

6.5.5 Théorème d'Alembert (1717/1783)

Un polynôme de degré n, à coefficients complexes admet n racines complexes, distinctes ou non.

Ce théorème, appelé aussi théorème fondamental d'algèbre sera admis sans démonstration. Remarquons simplement qu'il est la conséquence du théorème suivant :
Un polynôme de degré n, à coefficients complexes, a au moins une racine complexe.
En effet, dès lors, P(x) étant un polynôme de degré n, il a une racine x_1 et $P(x) = (x - x_1)\, Q(x)$, Q(x) étant de degré n – 1, et ainsi de suite. Donc $P(x) = a\,(x - x_1)^{r1}\,(x - x_2)^{r2} \ldots (x - x_p)^{rp}$ avec $r_1 + r_2 + \ldots + r_p = n$

7. Exercices

7.1 Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire des nombres complexes dont le module est ρ et l'argument mesure φ

ρ	3	2	1	3	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	4	2	1	2
φ	0	π	$\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{4}$	$-\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$

7.2 Démontrer

1) $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$ 2) $\overline{zz'} = \overline{z}.\overline{z'}$ 3) $\overline{z^n} = \left(\overline{z}\right)^n$ 4) $z\,.\,\overline{z} = |z|^2$

7.3 Calculer le module et l'argument des puissances successives de

1. i
2. - 2i
3. 1 + i
4. 1 - i
5. $-\sqrt{3} + i$
6. $1 - \sqrt{3}\,i$
7. $\frac{\sqrt{3}}{4}(i - 1)$
8. $-(\sqrt{3} + i)$

7.4 Calculer :

1) $(1 + i\sqrt{3})^{100}$ 2) $(1 + i\sqrt{3})^8 + (1 - i\sqrt{3})^8$ 3) $(1 + i\sqrt{3})^8 - (1 - i\sqrt{3})^8$

sol : 1) $(-1 - i\sqrt{3})\, 2^{99}$ 2) $-\,2^8$ 3) $2^8\sqrt{3}\ i$

7.5 Résoudre les équations suivantes :

1. $(1 - i)z^2 - 2z - (11 + 3i) = 0$
2. $z^2 - (5 - i)z + 8 - i = 0$
3. $z^2 - (5 - 4i\sqrt{3})\, z + 9 = 0$
4. $z^2 - 4\,(1 - i)\, z + 2\,(4 - i) = 0$
5. $2\, iz^2 - (1 + 2i)z + i - 1 = 0$

Solutions

1. $z_1 = 3 + 2i \quad z_2 = -2 - i$
2. $z_1 = 3 - 2i \quad z_2 = 2 + i$
3. $z_1 = \dfrac{9 - 9\sqrt{3}i}{2} \quad z_2 = \dfrac{1 + \sqrt{3}i}{2}$
4. $z_1 = 3 - 5i \quad z_2 = 1 + i$
5. $z_1 = 1 - i \quad z_2 = \frac{i}{2}$

7.6 Résoudre les équations binômes suivantes :

1. $z^3 = -8i$
2. $z^5 = \sqrt{3} - i$
3. $z^8 = -8i$
4. $z^6 = -\frac{1}{2}$
5. $z^5 = 2 - 2i$
6. $z^5 = 1 + i$
7. $z^5 = 1$
8. $z^4 + 1 - i = 0$
9. $z^3 = \frac{1}{2}(\sqrt{3} - i)$
10. $z^4 = 1 + i$

Solutions

1. $z_1 = 2 \text{ cis } \dfrac{\pi}{2} = 2i \qquad z_2 = 2 \text{ cis } \dfrac{7\pi}{6} = -\sqrt{3} - i \qquad z_3 = 2 \text{ cis } \dfrac{11\pi}{6} = \sqrt{3} - I$
2. $z_k = \sqrt[5]{2}\ \text{cis}\left(\dfrac{11\pi}{30} + k\dfrac{12\pi}{30}\right)$
   $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$
3. $z_k = \sqrt[8]{8}\ \text{cis}\left(\dfrac{3\pi}{16} + k\dfrac{\pi}{4}\right)$
   $k \in \{0, 1, 2 \ldots 7\}$
4. $z_k = \sqrt[6]{0.5}\ \text{cis}\left(\dfrac{\pi}{6} + k\dfrac{\pi}{3}\right)$
   $k \in \{0, 1, 2 \ldots 5\}$
5. $z_k = \sqrt[10]{8}\ \text{cis}\left(-\dfrac{\pi}{20} + k\dfrac{2\pi}{5}\right)$
   $k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$

6. $z_k = \sqrt[10]{2}\ \text{cis}\left(\frac{\pi}{20} + k\frac{2\pi}{5}\right)$
   $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$
7. $z_k = \text{cis}\left(k\frac{2\pi}{5}\right)$ $k \in \{0, 1, 2 \ldots 4\}$
8. $z_k = \sqrt[8]{2}\ \text{cis}\left(\frac{3\pi}{16} + k\frac{\pi}{2}\right)$ $k \in \{0, 1, 2, 3\}$
9. $z_k = \text{cis}\left(-\frac{\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3}\right) k \in \{1, 2, 3\}$
10. $z_k = \sqrt[8]{2}\ \text{cis}\left(\frac{\pi}{16} + k\frac{\pi}{2}\right)$ $k \in \{0, 1, 2, 3\}$

7.7 Exercices généraux

1. Résoudre : $[(1 - z) - (1 + z)]\,[(1 - z)^2 + (1 - z)(1 + z) + (1 + z)^2] = 0$ sol : 1) $z = 0$ ou $z = \pm\sqrt{3}\,i$
2. Résoudre : $z^4 - z^3 + 3z - 3 = 0$
   sol : $z_1 = 1$ $z_2 = \sqrt[3]{3}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ $z_3 = -\sqrt[3]{3}$ $z_4 = \sqrt[3]{3}\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
3. Résoudre : $z^6 + (1 - 2i)\,z^3 - 2\,i = 0$
   Sol : $z_1 = \sqrt[3]{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)$ $z_2 = \sqrt[3]{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)$ $z_3 = -\sqrt[3]{2}\ i$ $z_4 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$
   $z_5 = -1$ $z_6 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$
4. Résoudre : $z^8 - (1 + 4i)\,z^4 + (3i - 3) = 0$
   Sol : $z_1 = \sqrt[8]{2}\ \text{cis}\ \frac{\pi}{16}$ $z_2 = \sqrt[8]{2}\ \text{cis}\frac{9\pi}{16}$ $z_3 = \sqrt[8]{2}\ \text{cis}\frac{17\pi}{16}$ $z_4 = \sqrt[8]{2}\ \text{cis}\frac{25\pi}{16}$
   $z_5 = \sqrt[4]{3}\ \text{cis}\frac{\pi}{8}$ $z_6 = \sqrt[4]{3}\ \text{cis}\frac{5\pi}{8}$ $z_7 = \sqrt[4]{3}\ \text{cis}\frac{9\pi}{8}$ $z_8 = \sqrt[4]{3}\ \text{cis}\frac{13\pi}{8}$
5. a) Résoudre dans C : $z^8 + z^4 + 1 = 0$
   b) Décomposer le polynôme $z^8 + z^4 + 1$ en un produit de 4 polynômes du second degré à coefficients réels
   Sol. : a) $z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$ $z_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ $z_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$ $z_4 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$
   $z_5 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ $z_6 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$ $z_7 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ $z_8 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$
   b) $p(z) = (z^2 + \sqrt{3}\,z + 1)\,.\,(z^2 - \sqrt{3}\,z + 1)\,.\,(z^2 + z + 1)\,.\,(z^2 - z + 1)$

7.8 Exercices de synthèse

1. Démontrer :
   a) Que les n racines de l'équation $z^n = 1$ ($n \in N$) sont les puissances successives de l'une d'entre elles. Le choix de cette racine particulière est-il arbitraire ?
   b) Si $n \in N$ et $n \geq 1 \Rightarrow$ la somme des racines de l'équation $z^n = 1$ est nulle et le produit de ces racines vaut - 1 si n est pair et 1 si n est impair.
   c) Si $n \in N$ et $n \geq 1 \Rightarrow$ la somme des racines de l'équation $z^n = u$ ($u \in C$) est nulle et le produit de ces racines vaut - u si n est pair et 1 si n est impair.
2. Résoudre dans C : $4\,z^4 - 4z^3 + 5z^2 - 4z + 4 = 0$
3. Calculez les deux racines complexes (en fonction du paramètre réel a) de l'équation suivante :

$$z^2 + (a + 2i)\,z - \left(\frac{a}{2} + \frac{1}{4}\right) - i = 0$$

Quelle valeur donner au paramètre a, pour qu'une de ces racines soit purement imaginaire ?