V. Tableaux de nombres et fonctions

1. Critère de reconnaissance d'une fonction du premier ou second degré dans un tableau de nombres

1.1 Propriétés

Comment reconnaître dans un tableau de valeurs si on a affaire à une fonction du premier ou du second degré ?
Prenons des exemples de fonctions du premier degré et pour des accroissements constants de la variable, calculons les accroissements correspondants de la fonction.

Exemple 1

x	$f(x) = 2x + 1$	Δf
1	3	
		2
2	5	
		2
3	7	
		2
4	9	
		2
5	11	

Exemple 2

x	$f(x) = -3x + 5$	Δf
1	2	
		-3
2	-1	
		-3
3	-4	
		-3
4	-7	
		-3
5	-11	

Dans les 2 exemples proposés, nous avons considéré des accroissements constants de la variable. Nous constatons alors que la différence entre les valeurs de la fonction est également constante.
<u>Généralisation</u> :
$f(x + \Delta x) - f(x) = a (x + \Delta x) + b - (ax + b) = ax + a \Delta x - ax = a \Delta x$

La fonction affine : $f : R \to R : x \to f(x) = ax + b$ conserve l'égalité des différences
Lorsque l'accroissement de la variable (Δx) est constant, alors l'accroissement correspondant de la fonction (Δf) est constant également.

Si nous prenons maintenant des exemples de fonctions du second degré :
Nous constatons alors que pour des accroissements constants de la variable, les accroissements correspondants de la fonction (Δf) ne sont plus constants. Cependant les différences secondes (différences entre les accroissements successifs de la fonction) sont constantes.
Les 2 exemples suivants l'illustrent.

Exemple 4

x	$f(x) = 2x^2 + 3x - 1$	Δf	$\Delta (\Delta f)$
1	4		
		9	
2	13		4
		13	
3	26		4
		17	
4	43		4
		21	
5	64		

Exemple 5

x	$f(x) = -3x^2 + 2x + 5$	Δf	$\Delta(\Delta f)$
1	4		
		-7	
2	-3		-6
		-13	
3	-16		-6
		-19	
4	-35		-6
		-25	
5	-60		

<u>Généralisation</u> :
Nous devons donc montrer que pour un accroissement Δx constant, la différence seconde :
$[f(x + 2 \Delta x) - f(x + \Delta x)] - [f(x + \Delta x) - f(x)]$ est constante
En effet :$[f(x + 2 \Delta x) - f(x + \Delta x)] - [f(x + \Delta x) - f(x)] = f(x + 2 \Delta x) - 2 f(x + \Delta x) + f(x)$
$= a (x + 2\Delta x)^2 + b (x + 2 \Delta x) + c - 2a (x + \Delta x)^2 - 2b (x + \Delta x) - 2c + ax^2 + bx + c$
$= a x^2 + 4 ax \Delta x + 4a (\Delta x)^2 + bx + 2b \Delta x - 2a x^2 - 4ax \Delta x - 2a(\Delta x)^2 - 2bx - 2b \Delta x + ax^2 + bx$
$= 2a (\Delta x)^2$
qui est bien constant si Δx est constant.

La fonction du second degré f : R → R : x → f(x) = ax^2 + bx + c conserve l'égalité des différences secondes. Lorsque l'accroissement de la variable (Δx) est constant, alors les différences secondes de la fonction (accroissements des accroissements de la fonction : Δ(Δf)) sont constantes.

Comme nous le rappelions au début de ce chapitre, une fonction peut être connue par sa forme analytique, par son graphe, ou par un tableau de valeurs. Les propriétés ci-dessus vont nous permettre de repérer si un tableau de valeurs correspond à une fonction du premier degré ou à une fonction du second degré.

1.2 Applications

Déterminer dans les tableaux de valeurs suivants s'il s'agit de fonctions du premier ou du second degré. Ensuite, déterminer l'expression analytique de la fonction et tracer son graphe.

x	f_1 (x)
1	8
2	11
3	14
4	17
5	20
6	23
7	26

x	f_2 (x)
1	0
2	1
3	6
4	15
5	28
6	45
7	66
8	91

x	f_3 (x)
-3,2	23,8
-2,3	13,81
-1,4	7,06
-0,5	3,55
0,4	3,28
1,3	6,25
2,2	12,46
3,1	21,91

x	f_4 (x)
3,3	-0,21
3,4	-0,18
3,5	-0,15
3,6	-0,12
3,7	-0,09
3,8	-0,06
3,9	-0,03

La résolution des exercices précédents se fait aisément en résolvant un système d'équations (système de 2 équations à 2 inconnues s'il s'agit d'une fonction du premier degré ou un système de 3 équations à 3 inconnues s'il s'agit d'une fonction du second degré). Autres fonctions
Nous allons maintenant nous attacher à reconnaître d'autres types de fonctions dans des tableaux de nombres.

1.3 Critère de reconnaissance d'une fonction exponentielle

La fonction exponentielle f : R → R : x → f(x) = b e^{ax} transforme une égalité de différences en une égalité de rapports.

En effet :
Si x_1 et x_2 sont les abscisses de 2 points quelconques du graphique d'une fonction exponentielle
f : R → R : x → f(x) = b e^{ax}

Alors $\frac{f(x_2)}{f(x_1)}$ est une constante si $x_2 - x_1$ est une constante puisque $\frac{f(x_2)}{f(x_1)} = \frac{b\,e^{ax_2}}{b\,e^{ax_1}} = e^{a(x_2-x_1)}$

C à d : si $x_2 - x_1$ est constant alors $\frac{f(x_2)}{f(x_1)}$ est constant.

2. Critère de reconnaissance d'une fonction logarithmique

Une fonction logarithmique f : R_0^+ → R : x → f(x) = b + a ln x transforme une égalité de rapports en une égalité de différences.

En effet :
Si x_1 et x_2 sont les abscisses de 2 points quelconques du graphique d'une fonction logarithmique
f : R_0^+ → R : x → f(x) = b + a ln x

Alors $f(x_2) - f(x_1)$ est une constante si $\frac{x_2}{x_1}$ est une constante

puisque $f(x_2) - f(x_1) = b + a \ln x_2 - b - a \ln x_1 = a \ln \frac{x_2}{x_1}$

Nous remarquons bien sûr le lien avec le critère de reconnaissance d'une fonction exponentielle, ces deux fonctions étant réciproques l'une de l'autre.

3. Critère de reconnaissance d'une fonction puissance

La fonction puissance $f : R \to R : x \to f(x) = b\,x^a$ conserve l'égalité des rapports.

En effet : Si x_1 et x_2 sont les abscisses de 2 points quelconques du graphique d'une fonction puissance $f : R \to R : x \to f(x) = b\,x^a$

Alors $\frac{f(x_2)}{f(x_1)}$ est une constante si $\frac{x_2}{x_1}$ est une constante puisque $\frac{f(x_2)}{f(x_1)} = \frac{b\,x_2^{\,a}}{b\,x_1^{\,a}} = \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^a$

4. En résumé

Type et forme de fonctions	Propriété	
Fonction affine : $f(x) = ax + b$	Conserve l'égalité des différences	$x_2 - x_1 = K \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) = K'$
Fonction du second degré : $f(x) = ax^2 + bx + c$	Conserve l'égalité des différences secondes.	$x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = K \Rightarrow [f(x_3) - f(x_2)] - [f(x_2) - f(x_1)] = K'$
Fonction puissance : $f(x) = b\,x^a$	Conserve l'égalité des rapports	$\frac{x_2}{x_1} = K \Rightarrow \frac{f(x_2)}{f(x_1)} = K'$
Fonction exponentielle : $f(x) = b\,e^{ax}$	Transforme une égalité de différence en une égalité de rapports	$x_2 - x_1 = K \Rightarrow \frac{f(x_2)}{f(x_1)} = K'$
Fonction logarithmique : $f(x) = b + a \ln x$	Transforme une égalité de rapports en une égalité de différences	$\frac{x_2}{x_1} = K \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) = K'$

5. Exercices

5.1 Déterminer de quels types de fonctions il s'agit et Préciser ensuite la forme analytique de ces fonctions

x	f1(x)	f2(x)	f3(x)	f4(x)	f5(x)
1	1	0,7358	2	8	2,0000
2	8	0,2707	16	13	5,4657
3	21	0,0996	54	18	7,4931
4	40	0,0366	128	23	8,9315
5	65	0,0135	250	28	10,0472
6	96	0,0050	432	33	10,9588
7	133	0,0018	686	38	11,7296
8	176	0,0007	1024	43	12,3972
9	225	0,0002	1458	48	12,9861

5.2 En utilisant le logiciel Excel, déterminer de quels types de fonctions il s'agit et Préciser ensuite la forme analytique de ces fonctions

x	g1(x)	g2(x)	g3(x)	g4(x)	g5(x)
1	3,0000	4,4142	0,7358	2,2361	2,7143
2	4,3863	5,8284	0,2707	35,7771	11,4286
3	5,1972	7,2426	0,0996	181,1215	26,1429
4	5,7726	8,6569	0,0366	572,4334	46,8571
5	6,2189	10,0711	0,0135	1397,5425	73,5714
6	6,5835	11,4853	0,0050	2897,9441	106,2857
7	6,8918	12,8995	0,0018	5368,7992	145,0000
8	7,1589	14,3137	0,0007	9158,9344	189,7143
9	7,3944	15,7279	0,0002	14670,8420	240,4286

Solutions :

N° 5.1 : $f_1(x) = 3x^2 - 2x$ $f_2(x) = 2e^{-x}$ $f_3(x) = 2x^3$

$f_4(x) = 5x + 3$ $f_5(x) = 2 + 5 \ln x$

N° 5.2 : $g_1(x) = 3 + 2 \ln x$ $g_2(x) = \sqrt{2}\,x + 3$ $g_3(x) = 2e^{-x}$

$g_4(x) = \sqrt{5}\,x^4$ $g_5(x) = 3x^2 - \dfrac{2x}{7}$

6. Données résultant d'observations

Cependant, dans la pratique, les valeurs connues sont parfois entachées d'erreurs (dues à des imprécisions de mesure…)

Considérons l'exemple suivant :

Le trajet d'un objet lancé est un phénomène complexe qui peut être modélisé par une équation d'une fonction déjà connue. Un professeur de mathématiques a filmé avec une caméra numérique son fils en train de lancer un ballon. En regardant cet enregistrement avec arrêts sur images, il repère les données présentées ci-dessous (exprimant la hauteur de l'objet par rapport au sol en fonction de la durée).

Durée (en s)	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
Hauteur (en cm)	84	121	149	167	175	174	163	143	114	75

On demande de

- Construire le graphique à partir des données du tableau.
- Déterminer de quel type de fonction il s'agit
- Déterminer la forme analytique de cette fonction

Commentaires

En utilisant l'outil rencontré précédemment, nous constatons que les "différences secondes" de ce tableau de valeurs sont proches d'une constante (elles valent toutes –9 ou –10). On peut donc dire qu'on a "presque" une fonction du second degré.

Durée (en s)	0		0.1		0.2		0.3		0.4		0.5		0.6		0.7		0.8		0.9
Hauteur (en cm)	84		121		149		167		175		174		163		143		114		75
Δf		37		28		18		8		-1		-11		-20		-29		-39	
$\Delta(\Delta f)$			-9		-10		-10		-9		-10		-9		-9		-10		

Mais au moment de déterminer de quelle fonction il s'agit, nous sommes confrontés à un problème de choix :

Pour obtenir l'expression analytique de la fonction, on utilisera :

- un système de trois équations à trois inconnues qui se ramène rapidement à un système de deux équations à deux inconnues puisque l'on connaît l'ordonnée à l'origine,
- l'estimation de l'axe de symétrie,
- les formules de cinématique vues au cours de physique.

Et on constate aisément que ces différentes techniques ou même simplement le choix des équations du système nous conduiront à des fonctions différentes les unes des autres. Quelle fonction choisir dans ce cas et selon quel critère ?

Actuellement, nous n'avons pas encore établi de critère de choix pour déterminer une telle fonction : nous aborderons ces problèmes d'ajustement lors de l'étude des statistiques à deux variables et en particulier la droite de régression.