X. Matrices - Déterminants - Systèmes d'équations

1. Introduction.

1.1 Exemple

Afin de récolter de l'argent pour le camp, un groupe de guides vend des galettes et des truffes au chocolat. La première patrouille a vendu 10 paquets de galettes et 8 paquets de truffes. La seconde patrouille a vendu 12 paquets de galettes et 10 paquets de truffes. Et enfin la troisième patrouille a vendu 15 paquets de galettes et 5 paquets de truffes.

Le résultat de ces ventes peut être représenté à l'aide d'un tableau $\begin{pmatrix} 10 & 8 \\ 12 & 10 \\ 15 & 5 \end{pmatrix}$

où la première colonne correspond aux ventes de galettes et la seconde aux ventes de truffes.

1.2 Définitions - notations.

1. On appelle matrice d'ordre p x n sur R un tableau comprenant p lignes et n colonnes d'éléments de R
   Une matrice est notée à l'aide d'une lettre majuscule : $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \ldots$
   Dans notre exemple, nous avons une matrice 3 x 2
2. Les éléments d'une matrice sont notés avec des indices doubles : a_{ij} est l'élément de la $i^{ème}$ ligne et $j^{ème}$ colonne de la matrice $\mathcal{A}$
3. Une matrice d'ordre 1 x n est une *matrice ligne* : $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \end{pmatrix}$
4. Une matrice d'ordre p x 1 est une *matrice colonne* : $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \ldots \\ a_{p1} \end{pmatrix}$
5. On appelle rangée soit une ligne, soit une colonne
6. Si n = p, la matrice est carrée. Dans ce cas, les éléments a_{11}, a_{22} , a_{33}.... forment la *diagonale principale*.
7. On appelle *transposée* d'une matrice $\mathcal{A} = \mathcal{A}^t$, la matrice obtenue en permutant les lignes et les colonnes de $\mathcal{A}$. La $1^{ère}$ ligne devient la première colonne et inversement ....

   exemple : $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

   Une matrice égale à sa transposée est dite symétrique.
8. Parmi les matrices carrées, on trouve
   les *matrices triangulaires* où tous les éléments d'un même côté de la diagonale principale sont nuls.

   ex. : $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 0 \\ 10 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

   et les *matrices diagonales* où seuls les éléments de la diagonale principale sont différents de zéro.

   ex : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -23 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

2. Opérations sur les matrices.

2.1 Exemples .

Reprenons notre exemple de la vente de galettes et de truffes. Si la vente se fait en deux semaines et les résultats sont donnés pour chacune des semaines par les tableaux suivants :

semaine 1 : $\begin{pmatrix} 10 & 8 \\ 12 & 10 \\ 15 & 5 \end{pmatrix}$ semaine 2 : $\begin{pmatrix} 10 & 10 \\ 11 & 8 \\ 13 & 8 \end{pmatrix}$

Pour obtenir le total des ventes, il paraît normal d'additionner les éléments correspondants des deux matrices

c'est-à-dire : $\begin{pmatrix} 20 & 18 \\ 23 & 18 \\ 28 & 13 \end{pmatrix}$

De même, si on affirme avoir doublé les ventes de la première semaine, il faut que la matrice des ventes soit

égale à $\begin{pmatrix} 20 & 16 \\ 24 & 20 \\ 30 & 10 \end{pmatrix}$

Selon que les prix de vente ont été fixés à 3,5€ pour les galettes et 1.5€ pour les truffes ou à 3€ pour les galettes et 2€ pour les truffes, les recettes respectives pourront être calculées en utilisant la matrice des ventes et la matrice des tarifs pour obtenir le tableau final :

Ventes	Galettes	Truffes
Patrouille1	10	8
Patrouille2	12	10
Patrouille3	15	5

Tarifs	Tarif 1	Tarif 2
Galettes	3.5	3
Truffes	1,5	2

	Tarif 1	Tarif 2
Patrouille1	10 . 3.5 + 8 . 1.5	10 . 3 + 8 . 2
Patrouille2	12 . 3.5 + 10 . 1.5	12 . 3 + 10 . 2
Patrouille3	15 . 3.5 + 5 . 1.5	15 . 3 + 5 . 2

2.2 Définitions

L'observation des transformations effectuées sur les matrices ci-dessus nous suggère les définitions suivantes :

La <u>*somme de 2 matrices*</u> de même genre (p x n) est la matrice de type p x n obtenue en additionnant les éléments correspondants des deux matrices.

ex : $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$ $\mathcal{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}$ $\mathcal{A} + \mathcal{B} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \end{pmatrix}$

La <u>*multiplication d'une matrice de genre p x n par un réel r*</u> est la matrice obtenue en multipliant chacun de ses éléments par le réel r.

ex : $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$ $r \,.\, \mathcal{A} = \begin{pmatrix} r \cdot a_{11} & r \cdot a_{12} & r \cdot a_{13} \\ r \cdot a_{21} & r \cdot a_{22} & r \cdot a_{23} \end{pmatrix}$

Le <u>*produit d'une matrice de genre p $\times$ n par une matrice de type n $\times$ q*</u> est une matrice de type p $\times$ q telle que l'élément de la ième ligne, jème colonne est obtenu en faisant la somme des produits des éléments de la ième ligne de la première matrice par les éléments correspondants de la jème colonne de la seconde matrice.

ex : soit à effectuer le produit d'une matrice 2 x 3 par une matrice 3 x 2 : on obtient une matrice 2 x 2

$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$ $\mathcal{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}$

$$\mathcal{A} \cdot \mathcal{B} = \begin{pmatrix} a_{11}\cdot b_{11} + a_{12}\cdot b_{21} + a_{13}\cdot b_{31} & a_{11}\cdot b_{12} + a_{12}\cdot b_{22} + a_{13}\cdot b_{32} \\ a_{21}\cdot b_{11} + a_{22}\cdot b_{21} + a_{23}\cdot b_{31} & a_{21}\cdot b_{12} + a_{22}\cdot b_{22} + a_{23}\cdot b_{32} \end{pmatrix}$$

N.B. : pour pouvoir multiplier deux matrices entre elles, il faut que le nombre de colonnes de la première soit égal au nombre de lignes de la seconde.

2.3 Propriétés de ces opérations.

2.3.1 Addition de deux matrices.

On justifie aisément les propriétés suivantes. L'addition de deux matrices

1. est interne et partout définie : la somme de deux matrices de même type est une matrice de même type
2. est associative : $\forall \mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$, matrices de type n x p : $\mathcal{A} + (\mathcal{B} + \mathcal{C}) = (\mathcal{A} + \mathcal{B}) + \mathcal{C}$
3. est commutative : $\forall \mathcal{A}, \mathcal{B}$, matrices de type n x p : $\mathcal{A} + \mathcal{B} = \mathcal{B} + \mathcal{A}$
4. admet un élément neutre : la matrice de type n x p dont tous les éléments sont nuls.
5. chaque matrice de type n x p admet un symétrique : la matrice dont tous les éléments sont les opposés des éléments de la matrice de départ.

L'ensemble de ces propriétés fait de l'ensemble des matrices de type p x n , un groupe commutatif.

2.3.2 Produit de deux matrices.

Nous ne considérerons ici que le produit de 2 matrices de type n x n

<u>Exemple</u> :

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \quad \mathcal{C} = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -1 & 9 \end{pmatrix} \quad \mathcal{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathcal{E} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{3}{35} \\ 0 & \frac{1}{7} \end{pmatrix} \quad \mathcal{F} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer
1) $\mathcal{A}.\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}.\mathcal{A}$
2) $\mathcal{A}.(\mathcal{B}.\mathcal{C})$ et $(\mathcal{A}.\mathcal{B}).\mathcal{C}$
3) $\mathcal{A}.(\mathcal{B}-\mathcal{C})$ et $\mathcal{A}.\mathcal{B} - \mathcal{A}.\mathcal{C}$
4) $\mathcal{A}.\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}.\mathcal{A}$
5) $\mathcal{B}.\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}.\mathcal{B}$
6) $\mathcal{A}.\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}.\mathcal{A}$

L'observation des résultats ci-dessus nous suggère les conclusions suivantes :

1. Le produit de 2 matrices de type n x n est une opération interne et partout définie
2. Ce produit n'est pas commutatif
3. Ce produit est associatif.
4. La matrice diagonale dont tous les éléments de la diagonale principale sont égaux à 1 est la matrice neutre pour le produit. Elle est appelée matrice unité.
5. La matrice E est la matrice symétrique de la matrice B pour la multiplication. Elle est appelée matrice inverse.
6. La matrice F n'a pas de symétrique pour la multiplication. Nous montrerons ultérieurement que d'autres matrices n'ont pas d'inverse.

2.3.3 Exercices. Vérifier les opérations suivantes :

1. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$
2. $2.\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 & -5 & 0 \\ 4 & -3/2 & 8 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 6 \\ -3 & 8 \end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & -7 \end{pmatrix}$
5. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -9 \\ 20 & 13 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 3 & 3 & 7 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 2 & 4 \\ -5 & 4 & 0 \\ 4 & -7 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -29 & 6 \\ 37 & -31 & 26 \\ 34 & -34 & 12 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 8 & -3 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} -2 & 15 \\ 28 & 15 \\ -31 & 24 \end{pmatrix}$

8. $\left[\begin{pmatrix} 1 & -7 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}\right]^t + \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & -2 \\ 5 & -2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 & 3 & 34 \end{pmatrix}$

9. si $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & -4 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad \frac{1}{2}\mathcal{A}^2 - \frac{3}{2}\mathcal{A}^3 = \begin{pmatrix} -2 & 22 & -27 \\ -49 & -90 & 71 \\ -37/2 & -27/2 & 3 \end{pmatrix}$

3. Systèmes de 2 équations à 2 inconnues : méthode des déterminants.

Considérons un système $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$

si a, a′, b, b′ $\neq 0$, nous pouvons employer la méthode de Gauss.

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases} \begin{vmatrix} -a' \\ a \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b' \\ -b \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -aa'x - a'by = -a'c \\ aa'x + ab'y = ac' \end{cases} \text{ et } \begin{cases} ab'x + bb'y = cb' \\ -a'bx - bb'y = -bc' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (ab' - a'b)y = ac' - a'c \\ (ab' - a'b)x = cb' - bc' \end{cases}$$

a) si $ab' - a'b \neq 0$: $\begin{cases} y = \dfrac{ac' - a'c}{ab' - a'b} \\ x = \dfrac{cb' - bc'}{ab' - a'b} \end{cases}$

b) si $ab' - a'b = 0$ et $ac' - a'c = 0$ et $cb' - c'b = 0$ le système est indéterminé

c) si $ab' - a'b = 0$ et ($ac' - a'c \neq 0$ ou $cb' - c'b \neq 0$) le système est impossible

On peut montrer que même lorsque les conditions permettant d’employer la méthode de Gauss ne sont pas remplies (c-à-d a, a′, b, b′ $\neq 0$), ces conclusions restent vraies.

Mais ces solutions seront beaucoup plus faciles à écrire en employant la notation matricielle.

En effet, considérons les 3 matrices :

$M = \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}$ $\qquad M_x = \begin{pmatrix} c & b \\ c' & b' \end{pmatrix}$ $\qquad M_y = \begin{pmatrix} a & c \\ a' & c' \end{pmatrix}$ (matrices associées au système)

(Remarquons que M est la matrice des coefficients des variables, tandis que M_x et M_y sont obtenues à partir de M en remplaçant dans M la colonne des coefficients de la variable x (respectivement y)par la colonne des termes indépendants

Les déterminants de ces matrices valent respectivement:

$D = ab' - a'b$ déterminant principal du système.

$D_x = cb' - c'b$ et $D_y = ac' - a'c$ les deux autres déterminants.

Synthèse :

a) si $D \neq 0$ $\quad x = \dfrac{D_x}{D}$ $\quad y = \dfrac{D_y}{D}$ Système à solution unique appelé aussi **système de Cramer**

b) si D = 0 et D_x et D_y = 0 : système indéterminé

c) si D = 0 et (D_x ou $D_y \neq 0$) : système impossible.

Exercices

Résoudre les systèmes suivants en employant la méthode des déterminants.

1. $\begin{cases} 4x + 6y = 3 \\ 8x - y = 4 \end{cases}$ sol : $\left\{\left(\dfrac{27}{52}, \dfrac{2}{13}\right)\right\}$

2. $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ -4x + 2y = -6 \end{cases}$ sol : $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 2x - 3\}$

3. $\begin{cases} x+2y=1 \\ 2x-y=7 \end{cases}$ sol : {(3, - 1)}

4. $\begin{cases} 3x-6y=1 \\ -x+2y=4 \end{cases}$ sol : S = ∅ (syst. imp.)

5. $\begin{cases} x-3y=1 \\ 2x-6y=2 \end{cases}$ sol : S = $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 3y + 1\}$

4. Résolution de systèmes de 2 équations à 2 inconnues par le calcul de la matrice inverse.

4.1 Notations.

Considérons l'un des systèmes précédents : $\begin{cases} 4x+6y=3 \\ 8x-y=4 \end{cases}$

Les matrices $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$ $\mathcal{I} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\mathcal{S} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ respectivement matrice du système, matrice des inconnues et matrice des seconds membres permettent d'écrire le système sous la forme $\mathcal{A} . \mathcal{I} = \mathcal{S}$

Résoudre le système revient alors à déterminer la matrice inverse de $\mathcal{A}$ notée $\mathcal{A}^{-1}$.

En effet si $\mathcal{A}^{-1}$ existe, alors $\mathcal{A}^{-1}.\mathcal{A} . \mathcal{I} = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{S}$

Et donc $\mathcal{I} = \mathcal{A}^{-1} . \mathcal{S}$

4.2 Recherche de la matrice inverse d'une matrice 2X2

Soit $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ $\mathcal{A}^{-1} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$

Il faut donc que $\mathcal{A} . \mathcal{A}^{-1}$ = matrice unité.

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}x + a_{12}z = 1 \\ a_{11}y + a_{12}t = 0 \\ a_{21}x + a_{22}z = 0 \\ a_{21}y + a_{22}t = 1 \end{cases}$$

et nous obtenons ainsi un système de 4 équations à 4 inconnues.
Considérons tout d'abord le système formé par les équations 1 et 3:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}z = 1 \\ a_{21}x + a_{22}z = 0 \end{cases} \qquad D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \qquad D_x = \begin{vmatrix} 1 & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} = a_{22} \qquad D_z = \begin{vmatrix} a_{11} & 1 \\ a_{21} & 0 \end{vmatrix} = -a_{21}$$

Si D ≠ 0 ce système admet une solution unique : $x = \frac{a_{22}}{D}$ et $z = -\frac{a_{21}}{D}$

De même en prenant les équations 2 et 4 :

$$\begin{cases} a_{11}y + a_{12}t = 0 \\ a_{21}y + a_{22}t = 1 \end{cases} \qquad D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \qquad D_y = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} \\ 1 & a_{22} \end{vmatrix} = -a_{12} \qquad D_t = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & 1 \end{vmatrix} = a_{11}$$

Si D ≠ 0 ce système admet une solution unique : $y = -\frac{a_{12}}{D}$ et $t = \frac{a_{11}}{D}$

et donc $\mathcal{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{a_{22}}{D} & -\frac{a_{12}}{D} \\ -\frac{a_{21}}{D} & \frac{a_{11}}{D} \end{pmatrix} = \frac{1}{D}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$

<u>Conclusion</u> :

Si dans une matrice, on appelle cofacteur d'un élément a_{ij} la valeur $(-1)^{i+j}$ multipliée par l'élément de la matrice obtenu en supprimant la ligne i et la colonne j

exemple : cofacteur de l'élément $a_{11} = A_{11} = (-1)^2 . a_{22}$ $A_{12} = (-1)^{1+2} . a_{21}$

On constate alors que la matrice $\mathcal{A}^{-1}$ égale $\frac{1}{D}$. (matrice transposée des cofacteurs)

Exercices :
Déterminer les matrices inverses des matrices suivantes :

1. $\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$ sol : $\begin{pmatrix} 1/31 & 6/31 \\ 5/31 & -1/31 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ sol : $\begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 5 & -8 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$ sol : $\begin{pmatrix} 5 & -8 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ sol : $\begin{pmatrix} -2/13 & 1/13 \\ 3/13 & 5/13 \end{pmatrix}$

4.3 Résolution du système

Reprenons l'exemple considéré plus haut

$$\begin{cases} 4x + 6y = 3 \\ 8x - y = 4 \end{cases}$$

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 8 & -1 \end{pmatrix} \qquad \mathcal{I} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \text{et } \mathcal{S} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A}^{-1} = -\frac{1}{52}\begin{pmatrix} -1 & -8 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}^t = -\frac{1}{52}\begin{pmatrix} -1 & -6 \\ -8 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{et donc } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{S} = -\frac{1}{52}\begin{pmatrix} -1 & -6 \\ -8 & 4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = -\frac{1}{52}\begin{pmatrix} -27 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{27}{52} \\ \frac{2}{13} \end{pmatrix}$$

5. Généralisation : matrices 3 x 3 (n x n)

Dans les calculs, nous considérerons les matrice 3 x 3, mais l'ensemble de ce qui va suivre est applicable à des matrices n x n.

5.1 Déterminant d'une matrice 3 x 3

5.1.1 Mineur

On appelle mineur d'un élément d'une matrice n x n le déterminant de la matrice d'ordre (n - 1) obtenue en supprimant la ligne et la colonne qui comprennent cet élément. M_{ij} = mineur de l'élément a_{ij}

ex.: si $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ $M_{21} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$ =1 - 2 = -1 (on a supprimé la 2ème ligne et la 1ère colonne de $\mathcal{A}$)

$M_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$ = 4 - 3 = 1 (on a supprimé la 3ème ligne et la 3ème colonne de $\mathcal{A}$)

5.1.2 Cofacteur

Le cofacteur d'un élément a_{ij} d'une matrice est le produit de son mineur par $(-1)^{i+j}$
$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$
Dans l'exemple précédent, $A_{21} = 1$ et $A_{33} = 1$

5.1.3 Déterminant d'une matrice 3 x 3

Le déterminant d'une matrice 3 x 3 est égal à la somme des produits des éléments d'une rangée (c'est-à-dire une ligne ou une colonne) par les cofacteurs de ces éléments.
On peut montrer que cette valeur est indépendante de la rangée choisie.
En reprenant l'exemple précédent et en calculant le déterminant par rapport à la première ligne, nous obtenons:
$D = 2 . (-1)^{1+1} . (2 - 0) + 1 . (-1)^{1+2} . (3 - 0) + (-1) (-1)^{1+3} (3 . (-2) - 5 . 2) = 4 - 3 + (-1) (-16) = 17$

5.1.4 Déterminant d'une matrice n x n

La définition précédente se généralise aisément à une matrice 4 x 4 ou n x n, les mineurs des éléments d'une rangée étant eux-mêmes des déterminants de matrices 3 x 3 (ou (n - 1) x (n - 1))

5.1.5 Exercices :

Calculer les déterminants des matrices suivantes :

1. $\begin{pmatrix} 2 & 5 & -4 \\ 1 & 2 & 1 \\ -3 & 3 & -8 \end{pmatrix}$ sol : - 49

2. $\begin{pmatrix} -4 & 2 & -4 \\ 1 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ sol : - 34

3. $\begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ sol : - 34

4. $\begin{pmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & -3 \end{pmatrix}$ sol : 0

5.1.6 Remarque : règle de Sarrus.

Dans le cas particulier des matrices 3 x 3, il existe une méthode de simplification des calculs. Reprenons le calcul du déterminant du paragraphe 3.1.1. On disposera les deux premières colonnes de la matrice initiale à côté de celle-ci. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 3 & 2 \\ 5 & -2 & 1 & 5 & -2 \end{pmatrix}$ D s'obtient en faisant la somme des produits des termes des trois premières diagonale descendantes ainsi formées diminuée de la somme des produits des termes des autres diagonales c. à d. :

$D = a_{11} . a_{22} . a_{33} + a_{12} . a_{23} . a_{31} + ... - a_{31} . a_{22} . a_{13} - a_{32} . a_{23} . a_{11} - ....$

$D = 2 . 2 . 1 + 1 . 0 . 5 + (-1) . 3 . (-2) - 5 . 2 . (-1) - (-2) . 0 . 2 - 1 . 3 . 1 = 4 - 0 + 6 + 10 - 0 - 3 = 17$

Cette méthode est très pratique pour le cas des déterminants de matrices 3 x 3 mais ne se généralise pas à des matrices plus grandes.

5.2 Propriétés des déterminants.

1. Si une rangée d'une matrice est constituée de termes nuls, alors le déterminant de cette matrice est nul.

2. Si on multiplie les éléments d'une rangée d'un déterminant par r, alors le déterminant de cette matrice est multiplié par r.

$$\begin{vmatrix} a & r.b & c \\ a' & r.b' & c' \\ a'' & r.b'' & c'' \end{vmatrix} = rb\ (-1)^3\ (a'c'' - a''c') + rb'\ (-1)^4\ (ac'' - a''c) + rb''\ (-1)^5\ (ac' - a'c) = r \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

3. Si 2 rangées parallèles d'une matrice sont proportionnelles, alors le déterminant de cette matrice est nul
   ex. si $L_1 = r\ L_2 \Rightarrow$ en calculant le déterminant à partir de la troisième rangée :

$$\begin{vmatrix} r.a & r.b & r.c \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix} = a' \begin{vmatrix} r.b & r.c \\ b & c \end{vmatrix} - b' \begin{vmatrix} r.a & r.c \\ a & c \end{vmatrix} + c' \begin{vmatrix} r.a & r.b \\ a & b \end{vmatrix} = a' . 0 - b' . 0 + c' . 0$$

   Cas particulier : Si 2 rangées d'une matrice sont égales, alors le déterminant de cette matrice est nul.

4. Si une rangée d'une matrice est combinaison linéaire des autres rangées alors le déterminant de cette matrice vaut 0
   ex : si L_3est C.L. de L_1 et de L_2 : $L_3 = \alpha\ L_1 + \beta\ L_2$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ \alpha a + \beta a' & \alpha b + \beta b' & \alpha c + \beta c' \end{vmatrix} = (\alpha a + \beta a')A_{31} + (\alpha b + \beta b')\ A_{32} + (\alpha c + \beta c')\ A_{33}$$

$$= \alpha a\ A_{31} + \alpha b\ A_{32} + \alpha c\ A_{33} + \beta a' A_{31} + \beta b'\ A_{32} + \beta c'\ A_{33}$$

$$= \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ \alpha a & \alpha b & \alpha c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ \beta a' & \beta b' & \beta c' \end{vmatrix} = 0 + 0 \text{ par la propriété précédente.}$$

5. La somme des produits des éléments d'une rangée par les cofacteurs associés aux termes correspondants d'une rangée parallèle est nulle.

ex: Pour un déterminant $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ considérons la somme des produits des éléments de la première ligne par les cofacteurs associés aux termes correspondants de la troisième ligne $a_{11} A_{31} + a_{12} A_{32} + a_{13} A_{33}$

Observons que cette somme égale $= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix} = 0$ par la propriété 3

6. Si on permute 2 rangées parallèles d'un déterminant, la valeur de celui-ci change de signe.
7. Le déterminant d'une matrice est égal à celui de sa transposée
8. Le déterminant du produit de 2 matrices est égal au produit des déterminants de ces matrices.

On vérifiera aisément ces dernières propriétés sur des exemples, mais leur démonstration nécessite de longs calculs.

5.3 Inverse d'une matrice 3 x 3

Comme dans le cas d'une matrice 2 x 2 , nous pouvons calculer la matrice inverse lorsque son déterminant est non nul en multipliant par $\frac{1}{D}$ la matrice transposée de la matrice des cofacteurs. Concrètement, nous suivrons les étapes suivantes :

1. Calcul du déterminant de la matrice : D.
2. Remplacer chaque élément de $\mathcal{A}$ par son cofacteur
3. Transposer la matrice ainsi obtenue
4. Multiplier la matrice obtenue par 1/D

c'est-à-dire : $\mathcal{A}^{-1} = \frac{1}{D}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$

<u>Justification</u> : on peut voir aisément : $\frac{1}{D}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{D}\begin{pmatrix} D & 0 & 0 \\ 0 & D & 0 \\ 0 & 0 & D \end{pmatrix}$

En effet, chaque élément de la diagonale est égal au déterminant car il vaut la somme des produits des éléments d'une colonne de $\mathcal{A}$ par les cofacteurs de ces éléments. Les autres éléments du produit sont nuls car ils valent la somme des éléments d'une colonne de $\mathcal{A}$ par les cofacteurs correspondants des éléments d'une colonne parallèle.

Le dernier produit vaut bien évidemment la matrice unité.

Et inversement : $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \left(\frac{1}{D}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

<u>Exemple</u> : Déterminer la matrice inverse de $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

1. D = -10 2. Matrice des cofacteurs : $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 \\ -4 & -7 & 5 \\ -6 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ 3. Sa transposée : $\begin{pmatrix} 2 & -4 & -6 \\ 1 & -7 & -3 \\ -5 & 5 & 5 \end{pmatrix}$

4. Matrice inverse : $\begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ -\frac{1}{10} & \frac{7}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

On peut vérifier que le produit de la matrice par son inverse vaut bien la matrice unité.

5.4 Exercices :

Déterminer les matrices inverses des matrices du numéro 5.1.5

6. Système de 3 équations à 3 inconnues.

6.1 Résolution d'un système de 3 équations à 3 inconnues par la recherche de la matrice inverse.

Exemple : considérons le système suivant : $\begin{cases} 2x + y + 3z = 0 \\ -x + 2y = 2 \\ 3x - y + z = -3 \end{cases}$

Comme dans le cas d'un système de 2 équations à 2 inconnues, on peut écrire ce système sous forme matricielle

$\mathcal{A} . \mathcal{I} = \mathcal{S}$ avec $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ $\mathcal{I} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ $\mathcal{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

Si $\mathcal{A}^{-1}$ existe, $\mathcal{I} = \mathcal{A}^{-1} . \mathcal{S}$

Le calcul de $\mathcal{A}^{-1}$ nous donne : $\mathcal{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ -\frac{1}{10} & \frac{7}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ (calculé au point 5.3)

et donc $\mathcal{I} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ -\frac{1}{10} & \frac{7}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Mais on constate que cette méthode est assez longue. De plus, lorsque le déterminant de la matrice su système vaut 0, la méthode est inutilisable. Nous allons envisager une alternative plus rapide.

6.2 Généralisation de la méthode des déterminants. Système de Cramer

Dans le cas d'un système 2 x 2, nous avons vu au point 3 : si D est le déterminant du système, D_x celui de la matrice du système où on a remplacé la colonne des coefficients de x par les termes indépendants et D_y le déterminant de la matrice du système où on a remplacé la colonne des coefficients de y par les termes indépendants, alors si $D \neq 0$: $x = \frac{D_x}{D}$ et $y = \frac{Dy}{D}$

On peut montrer de même pour un système 3x 3: si $D \neq 0$ $x = \frac{D_x}{D}$ $y = \frac{Dy}{D}$ et $z = \frac{D_z}{D}$

Le système est alors appelé système de Cramer.

Exemple 1 :

$\begin{cases} 2x - y + 3z = -1 \\ x + 3z = 3 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases}$ on a respectivement : D = - 10 $D_x = 9$ $D_y = -31$ et $D_z = -13$

$\Rightarrow$ x = $-\frac{9}{10}$ y = $\frac{31}{10}$ et z = $\frac{13}{10}$

Mais lorsque D vaut zéro, différents cas peuvent se présenter :

<u>Exemple 2</u>:

$\begin{cases} 2x - y + 5z = 3 \\ x - 2y + 3z = 2 \\ x + y + 2z = 4 \end{cases}$ La matrice de ce système : $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ a un déterminant nul et au moins un des déterminants D_x , D_y , ou D_z n'est pas nul.

En observant cette matrice, on voit que la troisième ligne est combinaison linéaire des deux autres ($L_3 = L_1 - L_2$)

Mais les seconds membres des équations correspondantes ne vérifient pas cette relation. Dans ce cas on a un système impossible : S = $\varnothing$

<u>Exemple 3</u>:

$\begin{cases} 2x - y + 5z = 3 \\ x - 2y + 3z = 2 \\ x + y + 2z = 1 \end{cases}$ Seul le second membre de la troisième équation a changé, et cette fois il vérifie la même relation que les premiers membres. Dans ce cas, D_x , D_y , et D_z sont nuls : on a un système indéterminé. On peut considérer que le système se résume aux deux premières équations :

$\begin{cases} 2x - y + 5z = 3 \\ x - 2y + 3z = 2 \end{cases}$ En considérant la variable z comme un paramètre, on peut résoudre le système par rapport aux deux autres inconnues. on obtient alors : S = $\left\{ \left(\frac{4-7\alpha}{3}, \frac{-1+\alpha}{3}, \alpha \right) \quad \alpha \in R \right\}$

6.3 Rappel : équivalence de systèmes d'équations

<u>Définition</u> : deux systèmes d'équations sont équivalents ssi ils admettent le même ensemble de solutions.

<u>Exemples</u> : Résoudre les systèmes suivants

a) $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 2x + 2y = 6 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + y = 3 \\ 3x - 7y = -1 \end{cases}$

En observant les systèmes d'équations précédents, nous retrouvons les ***<u>règles d'équivalence des systèmes d'équations :</u>***

1. Si on permute deux équations d'un système, on obtient un système équivalent au système de départ.
2. Si on multiplie les 2 membres d'une équation d'un système par un même nombre non nul, on obtient un système d'équations équivalent au système de départ.
3. Si on remplace une équation d'un système d'équations par une combinaison linéaire de toutes les équations du système et que le coefficient de l'équation remplacée est non nul, alors on obtient un système équivalent au système de départ.

En résumé, si nous écrivons le système sous la forme : $\begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = 0 \\ A = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha A = 0 \\ B = 0 \end{cases} \quad \forall\ \alpha \in R_0 \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ \alpha A + \beta B = 0 \end{cases} \quad \forall\ \alpha, \beta \in R$ et $\beta \neq 0$

6.4 Résolution d'un système 3 x 3 par la méthode de triangularisation

<u>Exemple 1</u> : Soit le système $\begin{cases} 2x + y + 3z = 0 \\ -x + 2y = 2 \\ 3x - y + z = -3 \end{cases}$

Considérons la matrice 3 x 4 dont les trois premières colonnes sont les coefficients des inconnues et la quatrième, les termes indépendants c'est-à-dire $\mathcal{B}$ = $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

Nous allons remplacer ce système par des systèmes équivalents, mais en ne travaillant que sur les coefficients, c'est-à-dire sur les éléments de cette matrice. (multiplier ou diviser une équation du système revient en effet à multiplier ou diviser les termes d'une même ligne de la matrice).

Le but de ces transformations est d'obtenir une matrice du type $\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 0 & e & f & g \\ 0 & 0 & h & i \end{pmatrix}$ associée au système

$\begin{cases} ax+by+cz=d \\ ey+fz=g \\ hz=i \end{cases}$ qui se résout aisément (on détermine z par la 3ème équation, ensuite y à l'aide de la seconde en remplaçant z par sa valeur et de même pour x.

Reprenons notre exemple.

1ère étape : L'ordre des équations n'ayant aucune importance, on place de préférence en première ligne une équation dont le coefficient de x vaut 1

Dans notre cas, nous allons échanger les 2 premières lignes et ensuite multiplier la première ligne par (-1)

Nous obtenons : $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ Puis, nous allons transformer la matrice pour annuler tous les éléments de la première colonne sauf l'élément a_{11}

Pour cela, on va remplacer L_2 par $L_2 - 2L_1$ et L_3 par $L_3 - 3L_1$ (notation : $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$)

(en général : $L_2 \leftarrow L_2 - a_{21}L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - a_{31}L_1$) $\Rightarrow$On obtient : $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

2ème étape le but de cette étape est d'obtenir 0 pour l'élément situé en 3ème ligne et 2ème colonne.

Pour cela, on va remplacer la 3ème ligne par elle-même moins la 2ème ligne : notation : $L_3 \leftarrow L_3 - L2$ (remarquons qu'en procédant de la sorte, les éléments annulés précédemment ne changent pas.)

$\Rightarrow$ on obtient : $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y=-2 \\ 5y+3z=4 \\ -2z=-1 \end{cases}$ qui se résout aisément : $\begin{cases} x=-1 \\ y=\frac{1}{2} \\ z=\frac{1}{2} \end{cases}$

<u>Exemple 1bis</u>:

$\begin{cases} x+2y+3z=14 \\ 2x-y+z=3 \\ 3x+2y-4z=-5 \end{cases}$ et sa matrice associée : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -4 & -5 \end{pmatrix}$

Remplaçons L_2 par $L_2 - 2L_1$ et L_3 par $L_3 - 3L_1$ nous obtenons : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & -5 & -5 & -25 \\ 0 & -4 & -13 & -47 \end{pmatrix}$

En divisant la seconde ligne par –5, nous obtenons : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -4 & -13 & -47 \end{pmatrix}$

En remplaçant L_3 par $L_3 + 4L_2$ nous obtenons : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & -5 & -5 & -25 \\ 0 & 0 & -9 & -27 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y+3z=14 \\ -5y-5z=-25 \\ -9z=-27 \end{cases}$

La dernière équation nous permet de déterminer z = 3 et en remplaçant z par sa valeur dans la seconde équation, on trouve y = 2 et de même dans la première : x = 1

Ce second exemple nous permet de remarquer l'avantage d'avoir 1 comme élément a_{22} avant d'effectuer la seconde étape. Pour l'obtenir, on pourra effectuer une simplification comme ci-dessus ou échanger les 2 dernières équations…

Exemple 2 :Soit le système : $\begin{cases} 2x+3y+4z=6 \\ x-y+3z=5 \\ 4x+11y+6z=4 \end{cases}$ et sa matrice associée : $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 6 \\ 1 & -1 & 3 & 5 \\ 4 & 11 & 6 & 4 \end{pmatrix}$

a) $L_1 \leftarrow L_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 6 \\ 4 & 11 & 6 & 4 \end{pmatrix}$

b) $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 5 & -2 & -4 \\ 0 & 15 & -6 & -16 \end{pmatrix}$

c) $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 5 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$

La matrice ainsi obtenue est associée à un système dont la $3^{\text{ème}}$ équation est 0 x + 0 y + 0 z = - 4 qui est un système impossible. Le système initial n'admet donc pas de solution.

Exemple 3 : soit le système $\begin{cases} x+y-z=2 \\ 2x+y-3z=0 \\ x-y-3z=-6 \end{cases}$ et sa matrice associée : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & -3 & -6 \end{pmatrix}$

a) $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1 : \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & -2 & -2 & -8 \end{pmatrix}$

c) Diviser L_2 par (-1) $\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & -2 & -8 \end{pmatrix}$

d) $L_3 \leftarrow L_3 + 2L_3 : \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ qui correspond au système $\begin{cases} x-2z=-2 \\ y+z=4 \\ 0x+0y+0z=0 \end{cases}$

On peut alors considérer l'une des variables comme paramètre : soit z = α Ce paramètre peut prendre une valeur quelconque et nous obtenons une infinité de solutions en exprimant les autres variables à partir du paramètre en utilisant les deux premières équations : x = -2 + 2α et y = 4 - α

Exemples de solutions : (-2, 4, 0) (0, 3, 1) ….

L'ensemble de ces solutions peut être décrit de la façon suivante :$\{(-2 + 2\alpha, 4 - \alpha, \alpha) : \alpha \in R\}$

Remarque : (-2 + 2z, 4 - z, z) = (- 2, 4, 0) + z(2, - 1, 1)

L'ensemble des solutions sont les coordonnées des points d'une droite de l'espace passant par le point de coordonnée (- 2, 4, 0) et parallèle au vecteur directeur (2, -1, 1) : nous préciserons cette interprétation géométrique au chapitre XII

Un grand avantage de la triangularisation est de pouvoir aisément déterminer les solutions d'un système indéterminé (ce qui n'est pas le cas avec la méthode des déterminants ou celle de la matrice inverse). De plus cette méthode se généralise aisément à un système de n équations à n inconnues.

6.5 *Méthode de Gauss ou méthode du pivot.*

Cette méthode part du même principe que la triangularisation

Reprenons le premier exemple traité par triangularisation : Soit le système $\begin{cases} 2x+y+3z=0 \\ -x+2y=2 \\ 3x-y+z=-3 \end{cases}$

Et sa matrice associée : $\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

Le but cette fois est d'obtenir une matrice du type $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 1 & \gamma \end{pmatrix}$ associée au système $\begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \\ z = \gamma \end{cases}$

La dernière colonne de la matrice obtenue est alors solution du système : la solution est ainsi complètement déterminée à l'issue des transformations matricielles. Cette méthode est aisément programmable : c'est un des intérêts importants de cette méthode. .

<u>*1ère étape*</u> : L'ordre des équations n'ayant aucune importance, on place en première ligne une équation dont le coefficient de x vaut un. (Si aucune des équations n'a cette caractéristique, on devra d'abord diviser la première ligne par ce coefficient afin de le rendre égal à 1)

Cet élément (a_{11}) est le premier pivot

Dans notre cas, nous allons échanger les 2 premières lignes et ensuite multiplier la première ligne par (-1)

Nous obtenons : $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ Puis, nous allons transformer la matrice pour annuler tous les éléments de la première colonne sauf l'élément a_{11}

Pour cela, on va remplacer L_2 par $L_2 - 2L_1$ et L_3 par $L_3 - 3L_1$ (notation : $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$)

(en général : $L_2 \leftarrow L_2 - a_{21} L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - a_{31} L_1$) $\Rightarrow$On obtient : $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

<u>*2ème étape*</u> Divisons la seconde ligne par 5 de façon à obtenir l'élément 2ème ligne, 2ème colonne égal à 1 (second pivot) (En général division par a_{22}) $\Rightarrow$ on obtient : $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3/5 & 4/5 \\ 0 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Ensuite, on annule tous les éléments de la colonne du pivot sauf le pivot.

$L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2$ et $L_3 \leftarrow L_3 - 5L_2$ (En général : $L_1 \leftarrow L_1 - a_{12} L_2$ et $L_3 \leftarrow L_3 - a_{32} L_2$ $\Rightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 6/5 & -2/5 \\ 0 & 1 & 3/5 & 4/5 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

<u>*3ème étape*</u> Divisons L_3 par (-2) (en général par a_{33}) $\Rightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 6/5 & -2/5 \\ 0 & 1 & 3/5 & 4/5 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{pmatrix}$

Enfin, il ne reste plus qu'à annuler les termes de la colonne du pivot autres que le pivot.

$L_1 \leftarrow L_1 - 6/5\, L_3$ et $L_2 \leftarrow L_2 - 3/5\, L_3$ (En général : $L_1 \leftarrow L_1 - a_{13} L_3$ et $L_2 \leftarrow L_2 - a_{23} L_3$ $\Rightarrow$: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{pmatrix}$

La dernière colonne correspond bien la solution trouvée précédemment par la recherche de $\mathcal{A}^{-1}$

$S = \{(-1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})\}$

<u>Exemple 2</u> :Soit le système : $\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 6 \\ x - y + 3z = 5 \\ 4x + 11y + 6z = 4 \end{cases}$ et sa matrice associée : $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 6 \\ 1 & -1 & 3 & 5 \\ 4 & 11 & 6 & 4 \end{pmatrix}$

d) Echanger les deux premières lignes afin que le premier pivot soit égal à 1 $\Rightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 6 \\ 4 & 11 & 6 & 4 \end{pmatrix}$

e) $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1$ $\Rightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 5 & -2 & -4 \\ 0 & 15 & -6 & -16 \end{pmatrix}$

f) Diviser L_2 par 5 $\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -2/5 & -4/5 \\ 0 & 15 & -6 & -16 \end{pmatrix}$

g) $L_1 \leftarrow L_1 + L_2$ et $L_3 \leftarrow L_3 - 15\, L_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 13/5 & 21/5 \\ 0 & 1 & -2/5 & -4/5 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$

La matrice ainsi obtenue est associée à un système dont la 3ème équation est 0 x + 0 y + 0 z = - 4 qui est un système impossible. Le système initial n'admet donc pas de solution.

Exemple 3 : soit le système $\begin{cases} x + y - z = 2 \\ 2x + y - 3z = 0 \\ x - y - 3z = -6 \end{cases}$ et sa matrice associée : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & -3 & -6 \end{pmatrix}$

a) Le premier pivot est égal à 1

b) $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$: $\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & -2 & -2 & -8 \end{pmatrix}$

c) Diviser L_2 par (-1) $\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & -2 & -8 \end{pmatrix}$

d) $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$ et $L_3 \leftarrow L_3 + 2\, L_3$: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ qui correspond au système $\begin{cases} x - 2z = -2 \\ y + z = 4 \\ 0x + 0y + 0z = 0 \end{cases}$

On peut alors considérer l'une des variables comme paramètre : soit z = α Ce paramètre peut prendre une valeur quelconque et nous obtenons une infinité de solutions en exprimant les autres variables à partir du paramètre en utilisant les deux premières équations : x = -2 + 2α et y = 4 - α

Exemples de solutions : (-2, 4, 0) (0, 3, 1)

L'ensemble de ces solutions peut être décrit de la façon suivante :$\{(-2 + 2\alpha, 4 - \alpha, \alpha) : \alpha \in R\}$

6.6 Exercices :

Résoudre les systèmes suivants par l'une des méthodes précédentes.

1. $\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ -x - 2y - 3z = -14 \\ 2x - 7z = -19 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x + 2y + 3z = 14 \\ 2x - y + z = 3 \\ 3x + 2y - 4z = -5 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 1 \\ x + y + z = 1 \\ -x - 2y - 3z = 1 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x + y - z = 2 \\ 2x + y - 3z = 0 \\ 3x + y - 5z = -2 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x + 2y + 3z = 2 \\ 2x + 4y + 6z = 4 \\ 3x + 6y + 9z = 9 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 2x - y + 3z = 8 \\ x - y = 3 \\ x - 2y + z = 5 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x + 2y - 5z = 2 \\ -2x - 4y + 10z = -4 \\ 3x + 6y - 15z = 6 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 6 \\ x - y + 3z = 5 \\ 4x + 11y + 6z = 4 \end{cases}$

9. $\begin{cases} x + y - z = 2 \\ 2x + y - 3z = 0 \\ x - y - 3z = -6 \end{cases}$

10. $\begin{cases} 3x - 2y + 5z = 7 \\ 2x + y - z = -6 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$

11. $\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ 3x + 2y - 3z = 8 \\ 2x - y - z = 15 \end{cases}$

Solutions : 1) {(1, 2, 3)} 2) {(1, 2, 3)} 3) S = $\varnothing$ (système impossible)
4) système simplement indéterminé S = $\{(-2+2\lambda, 4-\lambda, \lambda), \lambda \in R\}$ 5) système impossible : s = $\varnothing$
6){(2, -1, 1)} 7) système doublement indéterminé S = $\{(-2\lambda + 5\mu + 2, \lambda, \mu), \lambda, \mu \in R\}$
8) système impossible : S = $\varnothing$ 9) système indéterminé : S = $\{(2\lambda - 2, -\lambda + 4, \lambda), \lambda \in R$ 10) {(-2, 1, 3)}
11) (6.5, -3.5, 1.5)

6.7 Cas particulier : les systèmes homogènes.

Un système est dit homogène lorsque les seconds membres de ses équations sont nuls. Un système homogène admet toujours au moins une solution : (x, y, z) = (0, 0, 0). Il ne pourra donc jamais être impossible.

6.8 Quelques problèmes d'application

1. Trouver un nombre de 3 chiffres sachant que la somme des chiffres est égale à 15, que la somme du chiffre des centaines et de celui des unités dépasse de 1 celui des dizaines et que le nombre lu à l'envers dépasse de 198 le nombre à chercher. sol : 375
2. Une entreprise de matériel électronique fabrique des TV, des vidéos et des lecteurs de CD à l'aide de Trois machines (I, II et III). Les consommations électriques par machine et par produit sont les suivantes :

	TV	Vidéo	CD
I	3kwh	2kwh	1kwh
II	2kwh	1kwh	3kwh
III	3kwh	0kwh	2kwh

   Au bout d'un certain temps, on relève les consommations de chaque machine : 56 kwh pour la machine I, 63 kwh pour la II et 54 kwh pour la III. Combien d'appareils de chaque type l'entreprise a-t-elle fabriqués durant cette période ? sol : 10 TV, 7 Vidéo et 12 lecteurs CD
3. **Trois fontaines A, B, C coulent dans un bassin. A et B le rempliraient en 1h10 min. A et C en 84 min et B et C en 2h20min. Combien faut-il de temps pour remplir le bassin
   a) à chaque fontaine ?
   b) aux 3 fontaines à la fois ? sol : a) 1h45, 3h30, 7h b) 1h

6.9 Recherche de la matrice inverse par la méthode du pivot.

6.9.1 Exemple.

Déterminer l'inverse d'une matrice revient en fait à résoudre 3 systèmes de 3 équations à 3 inconnues. En effet, prenons un exemple.

Soit à déterminer la matrice inverse de $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Il faut donc déterminer une matrice $\mathcal{B}$ telle que $\mathcal{A} \,.\, \mathcal{B} = \mathcal{I}$ c'est-à-dire :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2x_1 + y_1 3z_1 & 2x_2 + y_2 + 3z_2 & 2x_3 + y_3 + 3z_3 \\ -x_1 + 2y_1 & -x_2 + 2y_2 & -x_3 + 2y_3 \\ 3x_1 - y_1 + z_1 & 3x_2 - y_2 + z_2 & 3x_3 - y_3 + z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ce qui revient à résoudre 3 systèmes de 3 équations à 3 inconnues.

$$\begin{cases} 2x_1 + y_1 + 3z_1 = 1 \\ -x_1 + 2y_1 = 0 \\ 3x_1 - y_1 + z_1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_2 + y_2 + 3z_2 = 0 \\ -x_2 + 2y_2 = 1 \\ 3x_2 - y_2 + z_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_3 + y_3 + 3z_3 = 0 \\ -x_3 + 2y_3 = 0 \\ 3x_3 - y_3 + z_3 = 1 \end{cases}$$

Dans chacun de ces systèmes, les coefficients sont identiques, seuls les termes indépendants diffèrent.

Si on applique la méthode du pivot à ces trois systèmes, nous aurons trois fois la même démarche. Au lieu de le faire trois fois, nous ne le ferons qu'une seule fois en gardant les trois colonnes des termes indépendants.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) $L_1 \leftarrow 1/2\ L1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 3/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 3/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 5/2 & 3/2 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & -5/2 & -7/2 & -1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $L_2 \leftarrow 2/5\ L_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 3/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3/5 & 1/5 & 2/5 & 0 \\ 0 & -5/2 & -7/2 & -3/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

d) $L_1 \leftarrow L_1 - 1/2\ L_2$ et $L_3 \leftarrow L_3 + 5/2\ L_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6/5 & 2/5 & -1/5 & 0 \\ 0 & 1 & 3/5 & 1/5 & 2/5 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

e) $L_3 \leftarrow -1/2\ L_3 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6/5 & 2/5 & -1/5 & 0 \\ 0 & 1 & 3/5 & 1/5 & 2/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

f) $L_1 \leftarrow L_1 - 6/5\ L_3$ et $L_2 \leftarrow L_2 - 3/5 L_3 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1/5 & 2/5 & 3/5 \\ 0 & 1 & 0 & -1/10 & 7/10 & 3/10 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$ et $\mathcal{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -1/5 & 2/5 & 3/5 \\ -1/10 & 7/10 & 3/10 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

6.9.2 Exercices:

Déterminer les matrices inverses des matrices du numéro 5.1.5 par la méthode du pivot.

Solutions :

1) $\begin{pmatrix} 19/49 & -28/49 & -13/49 \\ -5/49 & 28/49 & 6/49 \\ -9/49 & 21/49 & 1/49 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} -1/34 & 10/34 & -4/34 \\ -1/34 & -24/34 & -4/34 \\ -8/34 & -22/34 & 2/34 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 12/34 & 4/34 & -14/34 \\ 3/34 & 1/34 & 5/34 \\ -7/34 & 9/34 & 11/34 \end{pmatrix}$

4) $\mathcal{A}^{-1}$ n'existe pas car dét $\mathcal{A} = 0$

7. "Autres" systèmes d'équations

7.1.1 Systèmes de 3 équations à 2 inconnues.

Soit le système : $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \\ a''x + b''y = c'' \end{cases}$

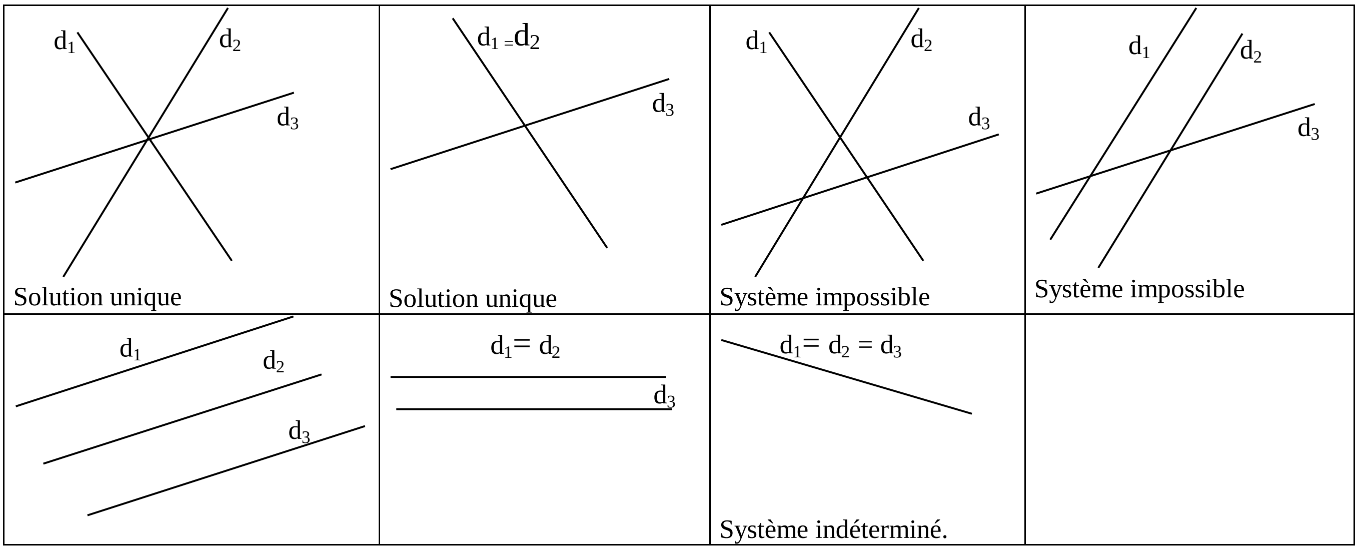
La méthode employée pour résoudre un tel système nous est dictée par l'interprétation géométrique du système.

Chacune des équations du système est l'équation d'une droite : d_1 , d_2, d_3

Résoudre le système revient à chercher un point commun aux trois droites : on va d'abord rechercher un point commun à deux d'entre elles et vérifier ensuite si ce point appartient à la 3ème droite.

Plusieurs cas sont possibles : l'ensemble des éventualités est repris dans le tableau ci-dessous

Chaque situation amène des caractéristiques spécifiques au système.



Système impossible	Système impossible		

7.1.2 Système de 2 équations à 3 inconnues.

Soit le système : $\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases}$

Les coefficients des variables nous permettent d'associer 3 déterminants à ce système :

$A_1 = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$ $\quad A_2 = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}$ $\quad$ et $A_3 = \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}$

a) Si l'un de ces déterminants est différent de 0, alors, on peut résoudre le système par rapport à 2 inconnues (celles dont les coefficients forment un déterminant non nul).

La solution est alors déterminée en fonction de la troisième inconnue.

b) Si tous les déterminants sont nuls, alors a = ka', b = kb', et c = kc'.

- Si de plus d= kd', le système est indéterminé. On peut alors exprimer une variable en fonction des deux autres.
- Sinon, le système est impossible.

Nous reviendrons à cette question après avoir étudié les équations de droites et plans dans l'espace : nous pourrons alors interpréter géométriquement les situations.

Applications

Résoudre les systèmes suivants :

1. $\begin{cases} 2x + 3y - 4z = 7 \\ x - y + 3z = 9 \end{cases}$
2. $\begin{cases} 2x - y + 3z = 6 \\ 4x - 2y + 6z = 7 \end{cases}$
3. $\begin{cases} 3x + 2y - 5z = 5 \\ 9x + 6y - 15z = 15 \end{cases}$

8. Discussions de systèmes d'équations

8.1 Exemple 1

Il arrive que certains coefficients des variables ne soient pas déterminés, mais contiennent un "paramètre"

Considérons le système suivant : $\begin{cases} mx - y = 1 \\ x - my = 2m - 1 \end{cases}$ $\quad m \in R$

Le calcul des déterminants associés à ce système, nous donne :

$D = \begin{vmatrix} m & -1 \\ 1 & -m \end{vmatrix} = 1 - m^2$ $\qquad D_x = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2m-1 & -m \end{vmatrix} = m - 1$ $\qquad D_y = \begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & 2m-1 \end{vmatrix} = 2m^2 - m - 1$

Par notre étude précédente (cfr. N° 3), nous savons que ce système admet une solution unique lorsque $D \neq 0$ et est impossible ou indéterminé lorsque D = 0. Envisageons d'abord les situations où D = 0 ($\Leftrightarrow$ m = ± 1)

a) Si m = 1 le système devient : $\begin{cases} x - y = 1 \\ x - y = 1 \end{cases}$ (2 équations équivalentes).

On peut alors exprimer une des inconnues en fonction de l'autre : y = x – 1

Si nous considérons l'inconnue x comme paramètre (en le nommant r), nous constatons que le système est indéterminé, il comporte une infinité de solutions : S = {(r, r – 1), $r \in R$}

b) Si m = - 1 le système devient : $\begin{cases} -x - y = 1 \\ x + y = -3 \end{cases}$ Si nous exprimons une des inconnues en fonction de l'autre dans la première équation : x = - 1 – y et que nous la remplaçons ensuite dans la seconde équation, nous obtenons une impossibilité : - 1 = 0. Le système est alors impossible : S = ∅

c) Si $m \neq 1$ et $m \neq -1$, alors le système admet une solution unique : $x = \dfrac{D_x}{D} = \dfrac{m-1}{1-m^2} = \dfrac{-1}{1+m}$

et $y = \frac{D_y}{D} = \frac{2m^2 - m - 1}{1 - m^2} = \frac{-2m - 1}{1 + m}$ $\quad\Rightarrow S = \left\{\left(\frac{-1}{1+m}, \frac{-2m-1}{1+m}\right)\right\}$

<u>En résumé</u> : a) si m = 1 : système indéterminé : S = {(r, r – 1), r ∈ R}

b) si m = - 1 = système impossible : S = ∅

c) si m ≠ 1 et m ≠ - 1 alors le système admet une solution unique : $S = \left\{\left(\frac{-1}{1+m}, \frac{-2m-1}{1+m}\right)\right\}$

<u>Rappel</u> : Un système de 2 équations à 2 inconnues correspond graphiquement à 2 droites dans le plan. Lorsque ce système est indéterminé, les droites sont confondues, lorsque le système est impossible, elles sont parallèles distinctes et enfin lorsque le système admet une solution unique, les droites sont sécantes.

8.2 Exemple 2

De même, considérons un système de 3 équations à 3 inconnues : $\begin{cases} mx + y - z = 1 \\ x + my - z = 1 \\ -x + y + mz = 1 \end{cases}$ où le paramètre m ∈ R.

Nous allons déterminer la solution du système en fonction de m.

Le calcul des déterminants associés à ce système nous donne :

$D = \begin{vmatrix} m & 1 & -1 \\ 1 & m & -1 \\ -1 & 1 & m \end{vmatrix} = m\,(m^2 - 1)$ $\qquad D_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & m & -1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = m^2 - 1$

$D_y = \begin{vmatrix} m & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & m \end{vmatrix} = m^2 - 1$ $\qquad$ et $D_z = \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = m^2 - 1$

Comme dans le cas des systèmes de 2 équations à 2 inconnues, le système admet une solution unique lorsque D ≠ 0 et est impossible ou indéterminé lorsque D = 0

D = 0 ⇔ m = 0 ou m = 1 ou m = -1

Envisageons ces différentes possibilités :

a) si m = 0 le système devient : $\begin{cases} y - z = 1 \\ x - z = 1 \\ -x + y = 1 \end{cases}$ que l'on peut écrire sous forme matricielle $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

et résoudre par triangularisation : $L_1 \leftrightarrow L_2$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ suivi de $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

suivi de $L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$: un système impossible : S = ∅

Interprétation géométrique : les 3 équations du système sont celles de 3 plans qui n'ont pas de points communs.

b) si m = 1, alors le système devient : $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x + y - z = 1 \\ -x + y + z = 1 \end{cases}$ que l'on peut écrire sous forme matricielle :

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et résoudre par triangularisation : $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

qui se résout aisément : 2y = 2 ⇒ y = 1 et en remplaçant dans la première équation : x + 1 – z = 1 ⇒ x – z = 0 ⇒ x = z. Le système est donc indéterminé : il admet une infinité de solutions : S = {(r, 1, r) r ∈ R)

Interprétation géométrique : Nous verrons ultérieurement que les 3 équations du système sont celles de 3 plans dont l'intersection est une droite

$$d \equiv \begin{cases} x = r \\ y = 1 \\ z = r \end{cases}$$ c-à-d dont le vecteur directeur a pour composantes : (1, 0, 1) et comprenant le point P (0, 1, 0)

c) si m = - 1, alors le système devient : $\begin{cases} -x+y-z=1 \\ x-y-z=1 \\ -x+y-z=1 \end{cases}$ écrit sous forme matricielle : $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Par les transformations : $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, nous obtenons : $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Comme dans le cas précédent, la dernière équation étant toujours vérifiée, le système équivaut à $\begin{cases} -x+y-z=1 \\ -2z=2 \end{cases}$ dont la solution se trouve aisément : z = -1 et y = x

Donc : S = {(r, r, -1) r ∈ R}

Interprétation géométrique : les 3 équations du système sont celles de 3 plans dont l'intersection est une droite

$$d \equiv \begin{cases} x = r \\ y = r \\ z = -1 \end{cases}$$ c-à-d dont le vecteur directeur a pour composantes : (1, 1, 0) et comprenant le point Q (0, 0, -1)

d) enfin, si m ≠ 0 et m ≠ ± 1 alors, le système admet une seule solution que l'on peut déterminer par une méthode au choix (des déterminants, triangularisation …)

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{m^2-1}{m(m^2-1)} = \frac{1}{m} \qquad y = \frac{D_y}{D} = \frac{m^2-1}{m(m^2-1)} = \frac{1}{m} \qquad z = \frac{D_z}{D} = \frac{m^2-1}{m(m^2-1)} = \frac{1}{m}$$

<u>En résumé :</u>

Si m = 0 : système impossible : S = ∅

Si m = 1 : système simplement indéterminé : S = {(r, 1, r) r ∈ R)

Si m = - 1 : système simplement indéterminé : S = {(r, 1, r) r ∈ R)

Si m ≠ 0 et m ≠ ± 1 : solution unique : S = $\left\{\left(\frac{1}{m},\frac{1}{m},\frac{1}{m}\right)\right\}$

8.3 Exercices

8.3.1 Résoudre et discuter les systèmes suivants dans R^2

(interpréter géométriquement dans le plan):

1. $\begin{cases} mx-y=2-m \\ mx+4y=3-m \end{cases}$
2. $\begin{cases} x-2y=7 \\ ax-4y=b \end{cases}$
3. $\begin{cases} x+(4-m)y=5+m \\ 2x-my=1-m \end{cases}$
4. $\begin{cases} (m+1)x=3-m \\ (m-1)x=1+m \end{cases}$
5. $\begin{cases} mx+y=0 \\ (m-1)x-2y=0 \end{cases}$
6. $\begin{cases} mx-3y+m=0 \\ (m-1)x+y-1=0 \end{cases}$

<u>Solutions :</u>

1. Si m = 0 : système impossible : S = ∅

   Si m ≠ 0 : S = $\left\{\left(\frac{11-5m}{5m},\frac{1}{5}\right)\right\}$
2. si a = 2 et b = 14 : syst. indét.: S = $\{(2r+7,r)\ r \in R\}$

   si a = 2 et b ≠ 14 : syst. imp. : S = ∅

   si a ≠ 2 : S = $\left\{\left(\frac{b-14}{a-2},\frac{b-14}{2a-4}\right)\right\}$

3. Si m = 8 : syst. imp. S = ∅

   si m ≠ 8 : S = $\left\{\left(\frac{-2(m^2+2)}{m-8}, \frac{-9-3m}{m-8}\right)\right\}$
4. Système impossible : S = ∅
5. Si m = $\frac{1}{3}$: syst. indét. S = {(-3r, r) r ∈ R}

   Si m ≠ $\frac{1}{3}$: S = {(0, 0)}
6. Si m = $\frac{3}{4}$: Système impossible : S = ∅

   si m ≠ $\frac{3}{4}$: S = $\left\{\left(\frac{3-m}{4m-3}, \frac{m^2}{4m-3}\right)\right\}$

8.3.2 Résoudre et discuter les systèmes suivants dans R^3

1. $\begin{cases} mx+y+z=1 \\ x+my+z=m \\ x+y+mz=m^2 \end{cases}$
2. $\begin{cases} ax+y+z=a^2 \\ 2ax+ay+2z=2a^2 \\ ax+y+az=1 \end{cases}$
3. $\begin{cases} mx+y+z=0 \\ x+my+z=0 \\ x+y+mz=0 \end{cases}$
4. $\begin{cases} ax+y-z=1 \\ x+ay-z=1 \\ -x+y+az=1 \end{cases}$
5. * $\begin{cases} ax+by+z=1 \\ x+aby-z=b \\ x+by+az=1 \end{cases}$

<u>Solutions :</u>

1. Si m = 1 : système doublement indéterminé : S = {(r, s, 1 – r – s), r, s ∈ R}

   Si m = - 2 : syst. imp. : S = ∅

   Si m ≠ 1 et m ≠ - 2 : S = $\left\{\left(\frac{-m-1}{2+m}, \frac{1}{2+m}, \frac{(1+m)^2}{2+m}\right)\right\}$
2. Si a = 0 : syst. imp. : S = ∅

   Si a = 1 : syst. indét. : S = {(r, 0, 1 - r) r ∈ R}

   si a = 2 : syst. indét. : S = {(r, 7 – 2r, - 3) r ∈ R}

   si a ≠ 0 et a ≠ 1 et a ≠ 2 : S = $\left\{\left(\frac{a^2+a+1}{a}, 0, -1-a\right)\right\}$
3. Si m = 1 : syst. doublement indét. : S = {(r, s, - r – s), r, s ∈ R}

   Si m = - 2 : syst. indét. : S = {(r,r,r), r ∈ R

   S m ≠ 1 et m ≠ - 2 : S = {(0, 0, 0)}
4. Si a = 0 : syst. imp. S = ∅

   Si a = 1 : syst. indét. : S = {(r, 1, r), r ∈ R}

   Si a = -1 : syst. indét. : S = {(r, r, - 1), r ∈ R}

   Si a ≠0 et a ≠ 1 et a ≠ - 1 : S = $\left\{\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{a}, \frac{1}{a}\right)\right\}$
5. Si a = 0 et b = 0 : syst. indét. : S = {(1, r, 1) r ∈ R}

   Si a = 0 et b ≠ 0 : syst. imp. : S = ∅

   Si b = 0 et a ≠ - 1 : syst. indét. : S = $\left\{\left(\frac{1}{a+1}, r, \frac{1}{a+1}\right) r \in R\right\}$

   Si b = 0 et a = -1 : syst. imp. : S = ∅

   Si a = 1 : syst. indét. : S : $\left\{\left(\frac{1+b-2r}{2}, r, \frac{1-b}{2}\right) r \in R\right\}$

Si a = - 1 : syst indét. : S = {(r, -1, r) r $\in$ R}

Si a $\neq$ 0 et b $\neq$ 0 et a $\neq \pm$ 1 : S = $\left\{\left(\frac{a-b}{a(a+1)}, \frac{1}{a}, \frac{a-b}{a(a+1)}\right)\right\}$